ALGEBRA,

Oder

Gründliche Anweisung

Zu

Der Buchstaben-Rechen-Kunst,

Mit sonderbarem Fleiß
für die Anfänger verfasset
Von

Johann Baptist Eberenz,

Beeder Rechten Cand. der freyen Künsten und Weltweißheit Doctorn, auch auf der Kayserl. Königl. Ertz-Herzogl. V. O. Hohen Schule zu Freyburg im Breyßgau der Kriegs- und Burgerl. Bau-Kunst Profess.

Augspurg und Freyburg im Breyßgau,

In Verlag der Gebrüder Ign. und Anton Wagner, Buchhändlern. 1758.

Es wird ein sehr guter Unterricht seyn, mein Glaukon, wenn man Leuten, die den größten Aemtern im Staate vorstehen werden, in den Kopf bringen wird, daß sie sich aufs Rechnen legen sollen, und zwar nicht schlecht, und gemein weg, sondern so lange, bis sie selbst die Natur der Zahlen mit ihrem Gemüthe werden ergründet haben: auch nicht des Kauffes, oder Verkauffes wegen, wie es Kaufleute und Wirthe machen, sondern damit sie zum Kriege tauglich werden, und eine gewisse Leichtigkeit ihrer Seele bekommen mögen.

Johann Rudolph Herr von Hackelberg und Landau in einer Abhandlung über die Nothwendigkeit der Mathematick bey dem jungen Adel, aus des Platons VII. Buch von der Republ.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Den

Sämmtlichen Hoch- und Löblichen Vorder-Oesterreich-Breyßgauischen Landsständen.

Meinen Gnädigst-Gnädig, auch Hoch-geehrtest- und Hochgeehrten Herren.

Hochfürstliche Gnaden!

Hochwürdigst- Hochwürdige, Hoch- und Wohlgebohrne, Hochedelgebohrne, und Hochgelehrte, Edelvest- Ehrsam- Fürsichtig- und Weise,

Gnädigst- Gnädig- auch Hochgeehrtest- und Hochgeehrte Herren!

Je heftig das Verlangen Euer Hochfürstlichen Gnaden, auch Hochwürden und Gnaden, Gnaden, auch meiner Hochgeehrtest- und Hochge-

ehrter

ehrter Herren nach dem Aufnehmen gründlicher Wissenschaften, wie groß und preiswürdig der Eyfer in Beförderung nützlicher Künsten, wie sehnlich die Wünsche nach dem Wachsthum allhiesiger Studien seyen, lieget schon längst am Tage, und bedarf es weiters keines Beweises; die Sache redet von selbsten, das gantze Vatterland nebst der weit- und breiten Welt ist dessen gäntzlich überwiesen. Dieses zeuget auch eine Hochlöbl. Kayserl. Königl. Ertzherzogl. V. Oe. Hohe Schule dahier, und erinneret sich annoch in ihren Vorfahreren gar wohl mit danckbarem Gemüthe, was massen " dieselbe so fürtrefflich jederzeit florirte Universitæt, nachdem sie durch die beständig der Enden obgeweste verderbliche Kriege so viel erlitten, daß sie in grosse Unvermögenheit eingesuncken (*); folgends die gehörige Salaria deren Professorum zu bestreiten alleinig nicht mehr vermögte, von Höchst- und Hoch-Deroselben mildreicher Hülfe großmüthig in so weit unterstützet worden, daß Höchst- und Hoch-Dieselbe

über

" über die bey selber übliche odinari - Studia, und deren sich auf
" alle Weis anliegende best-mögliche Beförderung noch andere
" dem Publico höchst-nützliche und nothwendige Professuras, als
" Juris naturæ & gentium, Historiæ, Processus tum civilis, tum
" criminalis, Architecturæ civilis & militaris, und neben denen Exercitien des Tantzens und Fechtens auch die Lectionen der Frantzösisch- und Italienischen Sprache aufgerichtet, und " aus eigener Bewegnuß allein der
" gemeinen Sach zum Guten, die erforderliche Kösten aus
" eigenen Mitteln hierzu zu suppeditiren übernohmen haben (*); Allein was haben wir nöthig auf die lang verflossenen Zeiten zuruck zu sehen, da gegenwärtige Exempel vorhanden sind? **Euer Hochfürstliche Gnaden, auch Hochwürden und Gnaden, Gnaden, auch meine Hochgeehrtest- und Hochgeehrte Herren** haben ja erst neulich an mir ein herr-

 liches

(*) Siehe den Recess de anno 1716. ddo. 22. Aug. so zwischen den Hochlöbl. Landsständen und der Löbl. Universitæt daselbst errichtet worden.

liches Denckmahl **Höchst = und Hoch = deroselben** rühmlichsten Eifers in Beförderung nützlicher Wissenschaften aufgestellet, da **Höchst = und Hoch-Dieselbe** die vorhin schon ledig gewordene Cathedram utriusque Architecturæ durch meine geringe Persohn gnädigst und gnädig wiederum zu ersetzen, und mit unzehlich = vielen Wohlthaten zu begnädigen geruhet; Deswegen würde ich der undanckbarste auf dieser Erde seyn, wenn ich nach so vielfältigen Gnaden = Bezeigungen **Höchst = nnd Hoch-Denenselben** kein demüthiges Opfer der Erkenntlichkeit zu Füssen legen sollte. Mein Hertz hat hier längst den Ausspruch gethan, und es für seine Pflicht erkläret, dasjenige wenigstens öffentlich zu rühmen, was ich, nach meinem Unvermögen, auf keine andere Weise vergelten kan.

Dieses

Dieses geringe Buch, so ich denen hohen Nämen **Euer Hochfürstlichen Gnaden, auch Hochwürden und Gnaden, Gnaden, auch meiner Hochgeehrtest- und Hochgeehrter Herren** unterthänigst zu widmen die Ehre habe, enthält in vier Banden die Regeln der Algebræ, Geometriæ, Trigonometriæ, Geschütz, Befestigungs- und Burgerlicher Bau-Kunst. Ich habe darinnen denen Liebhaberen architectonischer Wissenschaften einen ebenen, und geraden Weeg zu einer gründlichen Erkanntnis gebahnet, und der studirenden Jugend zum besten alles deutlich und klar ohne etwas abzukürzen, mit den zierlichsten Aufgaben, und derselben Auflösungen ausführlich beschrieben, in der getrösteten Hofnung, es werde niemand mehr als die **Sämtliche Hoch- und Löbliche Landsstände** mein gegenwärtiges

tiges Vorhaben billigen, und demselben einen erwünschten Fortgang gönnen. Ich gedencke aber das leztere nicht besser zu erhalten, als wenn **Höchst- und Hoch-Deroselben** Beyspiel, und Ruhmwürdigster Eyfer in Beförderung nützlicher Künsten jederman, der dieses Buch lesen wird, in die Augen leuchtet; Derowegen habe mir die Freyheit genohmen, dieser meiner geringen Arbeit **Höchst- und Hoch-Deroselben** Namen vorzuschreiben, und dabey aus Treu-ergebensten Gemüthe zu wünschen, daß der gütigste Beherrscher dieser Welt **Eure Hochfürstliche Gnaden, auch Hochwürden und Gnaden, Gnaden, auch meine Hochgeehrtest- und Hochgeehrte Herren** zur Wohlfahrt des V. Oe. Breyßgaues, und zum ewigen Glanze der allhiesigen Hohen Schule auf die spätesten Jahre in höchsten Wohlstand Vätterlich erhalten, mir aber die Gnade verleihen wolle, mich in tieffester Ehrfurcht, und der

voll-

vollkommensten Ergebenheit zu Höchst- und Hoch-Deroselben beharrlicher Huld, Schutz, und Gnade gehorsamst empfehlen, und Lebenslang neñen zu köñen

Eurer Hochfürstlichen Gnaden, auch Hochwürden und Gnaden, Gnaden, auch meiner Hochgeehrtest- und Hochgeehrter Herren

unterthänigst-gehorsamsten Diener
Johann Baptist Eberenz

Vorrede.

Geehrter Leser!

BEy Verfassung dieser gründlichen Anweisung zu der Algebra waren meine Absichte nicht etwas neues hervorbringen: denn dieses Unternehmen wäre vielleicht heute zu Tage nicht nur mir, sondern noch vielen anderen in dieser Kunst auch besser geübten zu schwer gefallen: wohl aber habe mir die Algebraische Lehr-Sätze, und Regeln denen Anfängeren so klar und deutlich zu beschreiben vorgenohmen, daß dieselbe auch ohne mündliche Unterweisung, durch fleißige Ubung alle Grundsätze, und die meisten Beschwerlichkeiten dieser so edlen als nützlichen Wissenschaft erlernen, und im Stand seyn mögen, so wohl in allen vorkommenden Fällen sich helfen zu wissen, als auch andere Authores, so von höheren Dingen geschrieben haben, mit Frucht zu lesen.

Demnach erscheinet ein solches Wergken, welches den Kunst-beflissenen Liebhaberen so wohl angenehm, als nützlich seyn möchte, anerwogen in teutscher Sprache sehr wenige, und zwar diese annoch dunckel genug von dieser Materie geschrieben haben, auch die Anzahl guter Lehr-Meisteren in die-

ser

ser Wissenschaft sehr gering ist, und wenn es auch deren etwann hin und wieder einige gibt, dieselbe dennoch eben nicht einem jeden, der es verlangt, so wohl wegen billicher Bezahlung der Mühe, als aus Mangel der Zeit zu Dienste willfahren können.

Derowegen habe mich entschlossen diese meine Arbeit dergestalt einzurichten, daß die Lehrjünger, wenn sie nur nach Maaß, was sie lesen, alsobald mit der Feder fleißig nacharbeiten, von sich selbst ohne fernere Erläuterung die Algebram zu erlernen im Stand seyn mögen. In dieser Absichte habe mir den geneigten Leser in dieser Wissenschaft gantz fremd, und unerfahren, nur daß er die vier ersten Regeln der gemeinen Zahl-Rechnung inne habe, vorgebildet, und von den ersten einfältigsten Grundsätzen unvermerckt zu höheren Dingen geleitet, da ich ihm unterweges allezeit Rechenschafft meines Verhaltens, und solche Beweißthümer, die nichts unerkanntes, und was vorhin noch nicht gelehrt worden, in sich enthalten, an die Hand gegeben. Nun ist es wahr, daß diese Weise die Sache abzuhandeln das Werck nothwendig habe vergrössern müssen; allein werden die Lehrjünger nur um so eher die gewünschten Früchten daraus einsamlen können, als sie des verdrüßigen Nachsinnens in vielen Stücken überhoben, die Sache weitläuffig, und deutlich beschrieben antreffen werden.

Damit aber diß Werkgen mit rechten Augen angesehen werde; muß ich etwas weniges von dessen Einrichtung errinnern. Ich hab geliebter Ordnung halben dasselbe in drey Theile geschieden: in dem ersten zeige ich die ersten Algebraischen Verrichtungen, das ist, wie die einfachen, zusammengefügten, und gebrochenen Grössen zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliciren, zu dividiren, zu ihren Dignitäten zu erheben,

und aus den erhobenen die Wurzeln zu ziehen sind, und mache den Schluß mit einem kurtzen, doch genugsamen Unterrichte von den Irrational-Grössen.

Da nun die Anfängere, wenn sie diesen ersten Theil mit Fleiß durchstudiret haben, im Stand sind alle Veränderungen mit den Buchstaben vorzunehmen, können sie zu der Analysin, oder andern Theile fortschreiten; darinnen lehre ich, wie sie die in dem ersten erlernete Regeln in Auflösung der Gleichungen, und Aufgaben des ersten, andern, und dritten Grades anbringen sollen. Ich habe dahier die nützlichsten Lehrsätze auf gehörige Weise erwiesen, und damit sie denen Lehrjüngeren nicht verdrüßlich fielen, ihren Nutzen jederzeit in Auflösung anmuthiger Aufgaben gezeiget.

Von da bin ich zu dem lezten Theile gekommen, und habe die arithmetisch- und geometrische Verhältnissen, Proportionen, und Progreßionen, die Weise den grösten und kleinsten Theiler einer gegebenen Zahl ausfindig zu machen, die Combinationen, und Permutationen, nebst verschiedenen andern nützlichen Dingen abgehandelt; dieser Theile ist die Seele der Geometrie, und diese aller Wissenschaften; deßwegen verdienet er mit sonderbarem Fleiß beschrieben, und gelesen zu werden. Ich hab ferners die Theile im Capitel, die Capitel in Paragraphos, und diese in Numeros eingetheilet, damit der geehrte Leser desto leichter an die hin- und wieder citirte Stellen verwiesen werden könnte. In den Auflösungen der Aufgaben hab ich alles, was zu thun ist, mit Worten deutlich, und in der Operation selbst, durch Zeichen, ohne etwas abzukürtzen, klärlich beschrieben, und vorgestellet. Die Kunst-Wörter der alten, welche zur Deutlichkeit nichts beytragen, hab ich weggelassen, und nur die, so einen deutlichen Begriffe in unserm Verstande er-

regen können, behalten, und erkläret, auch nur unserer Mund-Art gemässe Endungen gegeben.

Ubrigens, wenn die Liebhabere sich dieses Werkgen zu nutzen machen wollen, werden sie allezeit Papier vor sich, und die Feder in der Hand haben; denn diese Wissensaft lässet sich nicht-wie die historische durch fleißiges lesen erlernen; es wird ein beständige Aufmercksamkeit, und stete Ubung erfordert, dergestalt, daß man keine Linie mit Frucht lesen kan, wenn man nicht alsobald das Gelesene mit der Feder nacharbeitet: ja es will auch absonderlich nöthig seyn, daß man bey Auflösung der Aufgaben sowohl die verschiedenen Exempel nachrechne, als auch andere sich selbst aufgebe, bis man diese Rechnung in richtiger Fertigkeit hat. Kommen etwann in Erlernung der Algebra einige Schwierigkeiten hervor, sollen die Anfänger ihren Muth nicht gleich sincken lassen, und aus Ungedult die Arbeit aufgeben, sondern den schlechten Verdruß, der ihnen dabey erwachsen köñte, mit Standhaftigkeit überwinden, und gedenken, diese kleine Schwierigkeiten seyen insgemein nur kleine Wölklein, die das annoch schwache Vernunfts-Liecht noch nicht gänzlich vertheilen mag; denn mit geringer Mühe, wenn sie fortfahren, werden sie verspüren, daß die Wolken sich vertheilen, und die Vernunft aus dem Dunkeln hervor an des hellen Tages-Liechte geleitet werde.

Wer dise Weise zu studiren beobachtet, wird mit Vergnügen meine Arbeit gerechtfertigen, und gestehen, daß ich auf dem Titul-Blat dieses Werkgens nichts zuviel versprochen, was ich nicht gehalten; sondern meinen Worten in Allweege ein Genügen geleistet habe. Unterdessen lebe der geehrter Leser wohl, und nehme meine gute Absichten noch ferners geneigt an.

In dem Ersten Theil.

ERRATA.

Fol. 8. . . lin. 5. anstatt :	c I	.	leset	:	c^1
29. . . - 5. -	⸗ 12abc	-		⸗	12ab
30. . . - 10. -	⸗ so zu Ende	-		⸗	so ist es geschehen
32. . . - 14. -	⸗ a — b	-		⸗	a — x
32. . . - 6. -	⸗ $x^3 3$	-		⸗	$a^3 x$
39. . . - zu Ende	⸗ $\frac{72}{2}$	-		⸗	$\frac{72}{3} = 24.$
48. . . - 7. -	⸗ Ausgabe	-		⸗	Aufgabe
56. . . - 7. -	⸗ a^4	-		⸗	x^4
75. . . - 11. -	⸗ 29	-		⸗	27.

In dem anderen Theile.

ERRATA.

Fol. 14. n. 25. lin. 10. anstatt :	gleich der sume.	leset :	gleich der helfte der sume.
26. . . - 17. -	⸗ setzete in der stelle	⸗	setzet in die Stelle.
28. . . - 14. -	⸗ 513 = 20	- ⸗	513 = 2c
53. . . - 3. -	⸗ $\frac{5}{3}a$.	- ⸗	$\frac{3}{5}a$
63. . . - 6. -	⸗ $z = \frac{a + y^1}{y + 1}$	- ⸗	$z = \frac{a + y}{y + 1}$
72. . . - 24. -	⸗ an 7 Maasen 15. kr.		35. Kreuzer.
73. . . - 3. -	⸗ demnoch	- ⸗	demnach
77. n. 75. - 2. -	⸗ für ein Grade	- ⸗	für ein Gliede.
87. . . - 14. -	⸗ als die ersten	- ⸗	als die in der ersten
121. . . - 3. -	⸗ haben	- ⸗	hat.
154. n. 168. - 2. -	⸗ in der neuegefundene	⸗	neu gefundene.

Der gründlichen Anweisung Zu Der Buchstaben-Rechen-Kunst

Erster Theil

Darinnen gezeiget wird.

Wie die vier ersten Algebraischen Regeln bey den einfachen, zusammengefügten, und gebrochenen Grössen anzubringen, wie die Grössen zu ihren Potenzen zu erheben, und aus den erhobenen die Wurzeln zu ziehen sind, nebst einem kurzen Berichte von den Irrational-Grössen.

Das Erste Capitel

Bestehet in einem vorläuffigen Unterrichte.

§. I.

Erklärung der Algebra.

1.) Die Algebra, oder Buchstaben-Rechen-Kunst ist eine Wissenschaft, die mit den Buchstaben des Alphabets nicht nur alle Aufgaben der Zahl- oder gemeinen Rechnung, sondern noch viele andere, so durch die Zahlen nicht können gefunden werden, auflöset, ohne den menschlichen Verstand einzuschräncken, oder auf etwas gewisses anzuheften; dannenhero ist

die Algebra eine algemeine Rechen-Kunst, dardurch man alles, was sich rechnen läßt, ausrechnen kan; folgends ist ihre Methode gantz allgemeine, und erstrecket sich nicht nur auf die Maasen der Linien, Flächen, und Cörper, sondern auf alle endliche Dinge, deren sie uns einen deutlichen Begriff von ihrer Endlichkeit mittheilen kan; ja ohne sie würde in den meisten Fällen unmöglich seyn zu einer vollkomenen Erkanntnis der Dinge zu gelangen. Sie hat ihren Ursprung von den Arabern, und wird von denselben nach Zeugnis des Herrn von Crouzas in ihrer Mutter-Sprache alg-jabre Walmukabala genennet. Wir können sie mit dem Herrn Baron von Wolf in unserer teutschen Sprache mit gutem Fuge eine All-Rechen-Kunst heissen; zumahlen, wenn man die Analysin mit dazu nimmet, man alles, was sich rechnen lasset, ausrechnen kan.

§. II.

Zeichen-Erklärung.

2.) IN der gemeinen Rechnung haben die Ziffer ihren gewissen Werthe; dannenhero, wenn man zwey Zahlen zusammen addiret, oder eine von der andern subtrahiret, oder multipliciret, oder eine durch die andere dividiret, können allezeit andere Zahlen gefunden werden, welche ihre Summe, oder ihren Unterscheide, oder ihre Producte, oder ihre Quotienten vorstellen. In der Algebra hat es mit den Buchstaben eine ganz andere Beschaffenheit; denn, weil der Buchstab a oder b bald die Stelle einer kleinen, bald einer grossen Zahl vertretten muß, nach Unterscheide der Aufgabe, die man aufzulösen hat, kan man nicht wohl sagen, es sey ein dritter Buchstab, c oder d, der ihre Summe, oder ihren Unterscheid ꝛc. vorstelle, ohne neue Suppositiones, die in grossen Rechnungen sehr beschwerlich sind, zu machen. Aus dieser Ursache haben die Mathematici sich gewisse Zeichen auserfonnen, eines Theils dieser Beschwerlichkeit im rechnen zu entgehen; andern Theils ihre Operationes so deutlich zu machen, daß nach geendigter Rechnung die Wahrheit alsobald in die Augen leuchten, und man Schritt vor Schritt

erkennen möge, wie das gefundene herausgekommen sey. Nun weil die Grössen undeterminirte Zahlen sind, so kan man auch keine andere Veränderungen, als wie mit Zahlen, mit ihnen vornehmen, und daher sie entweder zusamen addiren, oder von einander subtrahiren, oder durch einander multipliciren, oder durch einander dividiren; gleichwie ihr aber mit Zahlen keine Rechnung vornehmen könnet, ihr müsset euch zuvor dieselben durch gewisse Zeichen vorstellen: eben so wird in der Algebra erfordert, daß ihr für die Grössen gewisse Zeichen, das ist, gewisse Buchstaben, und für ihre Operationes anzudeuten wieder andere annehmet. Es haben aber die Gelehrte folgende angenommen:

3.) Das Zeichen der Addition ist +, und wird durch Mehr ausgesprochen. Dahero schreibet man die Summe zweyer Grössen a und b also: a + b. dieses will andeuten, daß zu der Grösse, so unter a verstanden wird, die unter b vorgestellte Grösse addiret worden sey. Dieses Zeichen wird insgemein das Mehr-Zeichen benahmet.

4.) Das Zeichen der Addition ist also ein Creutzlein, und dagegen das wiedrige der Subtraction ein horizontal-liegendes Strüchlein —, so durch weniger ausgesprochen, und das Minder-Zeichen genennet wird. Die Differenz zweyer grössen a und b wird durch a — b geschrieben, und: a weniger b. ausgesprochen. Deswegen will a — b andeuten, die Grösse b sey von der Grösse a abgezogen worden.

5.) Die Multiplication hat entweder gar kein Zeichen, sondern man setzet die Buchstaben, welche einander multipliciren, ohne einiges Zeichen neben einander: oder man deutet sie durch ein Coma (,) oder einen Puncte (.) an. Insgemein brauchet man dieses $\times$ Zeichen. des Comatis, und Puncti werden wir uns niemahlen, des leztern Zeichens aber nur in gewissen Fällen, wen es nemlich die Umstände also erfordern, bedienen.

6.) Das Zeichen der Division sind zwey über einander gesezte Puncte, (:) oder man schreibt die Buchstaben, so einander dividiren sollen, wie in der gemeinen Rechnung einen Bruch. Wenn a durch b zu dividiren ist, so wird der Quotient entweder a : b, oder $\frac{a}{b}$ ge-

schrieben, und beyderseits: (a durch b dividiret) ausgesprochen.

7.) Zwey eben liegende Parallel-Linien = heissen das Gleichungs-Zeichen, und zeigen an, daß die zur Rechten und Lincken dieses Zeichens stehende Grösse gleiche sind. a = x. wird ausgesprochen: a gleichet dem x.

8.) Das Zeichen √ neñet man insgemein Wurzel-Zeichen; √ oder $\sqrt[2]{}$ will die Quadrat-$\sqrt[3]{}$ die Cubic-und $\sqrt[4]{}$ die Biquadrat-Wurzel ꝛc. anzeigen.

9.) Die Grössen, so eine arithmetische Proportion mit einander machen, schreiben wir nach der Lehr-Art des Herrn Baron von Wolf also: a ∸ b = c ∸ d. die aber in einer Geometrischen neben einander stehen mit dem Herrn von Leibniz dergestalt: a : b = c : d in beyden spricht man: wie sich verhält die erste Grösse zu der anderen, so die dritte zu der vierten. Diese Redens-Art hat in dem ersten Falle den Verstand: um wie viel die erste Grösse grösser oder kleiner als die andere ist, um eben so viel ist die dritte Grösse grösser oder kleiner als die vierte. Hingegen in dem andern Falle muß man sie dergestalt erklären: wie vielmahl die erste Grösse die andere in sich enthält, oder in ihr enthalten ist; eben so vielmahl enthält die dritte Grösse die vierte in sich, oder ist in ihr enthalten.

§. III.

Von den Grössen, und ihrer Beneñung.

10.) Eine grösse nennen wir alles dasjenige, was sich vermehren, und verminderen läßt, in so weit es sich vermehren, und verminderen läßt, folgends mit dem Herrn von Wolf alles, was Theile hat. In der Physica werden verschiedene Gattungen der Grössen betrachtet, unter welchen einige Quantitates continuæ, andere discretæ, diese successivæ, und jene permanentes heissen. In der Algebra aber betrachtet man die Grössen, wie sie sich dem Verstande zu erkeñen geben. Nun stellen sie sich in den

Alge-

Algebraischen Aufgaben jederzeit dem Verstande vor entweder als gegebene, das ist, bekannt gemachte, oder als gesuchte, das ist, noch unbekannte Grössen: deßwegen muß man auch durch die Zeichen unserer Einbildungs-Kraft diesen Unterscheid klärlich vorstellen; denn sonst wäre Gefahr, daß man das unbekannte mit dem bekannten leicht verwirrete, und daher in Irrthum verfiele. Dannenhero benennet man die gegebene, oder bekannte Grössen mit den ersten a, b, c ꝛc. die unbekannte aber, welche man suchet, mit den lezteren x, y, z ꝛc. und die, deren Werthe ungewisse, veränderlich, und verschieden ist, mit den mittleren Buchstaben des Alphabets m, n, p ꝛc. ferners mögen diese Grössen Quantitates succeſſivæ, oder permanentes, continuæ oder diſcretæ seyn, so sind sie dennoch entweder ſimplices oder compoſitæ, poſitivæ, oder negativæ; das ist, einfache, oder zusamengefügte, wahre oder falsche Grössen.

11.) Quantitates ſimpliccs einfache, oder einzele Grössen sind, die nur durch einen Buchstabe angedeutet werden. Von dieser Art sind: a, b, c, — a, — d, — x ꝛc.

12.) Quantitates compoſitæ, oder zusamengefügte Grössen heissen diejenige, so aus zwey oder mehreren Grössen durch das Mehr-oder Minder-Zeichen gebunden oder abgesöndert werden. a + b ist eine aus zweyen gebundene, a — b — c aus dreyen abgesönderte Grösse. Alle diese Grössen, sowohl die gebundenen, als abgesönderten können ohne Unterscheide unter dem Name zusamengefügter Grössen in Betrachtung gezogen werden.

13.) Quantitates poſitivæ, oder wahre Grössen sind, welche mit +, oder gar ohne einiges Zeichen zum Vorscheine kommen. Sind diese Grössen ohne Zeichen, so wird + darunter verstanden; deswegen ist a eben so viel als + a. insgemein wird dieses Zeichen zu Anfang einer Ausdruckung weggelassen; demnach wird anstatt + a + b besser a + b geschrieben.

14.) Quautitates negativæ, oder falsche Grössen sind, welche mit dem Minder-Zeichen behaftet, nicht anders als Schulden an-

gesehen werden, und eher unter die Zahl der Fehleren, als Grössen gehören. Es wiedersprechen zwar viele diese Gattung der Grössen, als Dinge, die dem Menschlichen Verstande überlegen seyn sollen, da dennoch nichts einfältigeres, und der natürlichen Beschaffenheit ähnlicheres ausersonnen werden kan. Zu dessen Beweiß sey uns ein Armer, welcher nebst dem, daß er nichts hat, noch dazu 10 fl. über sein Vermögen schuldig ist; da scheinet ja unwidersprechlich sein Stand unter nichts erniedriget zu seyn; weil 10 fl. erforderet würden, nur daß man sagen könnte, sein Vermögen gleiche einer Nulle; deßwegen sind diese 10 fl. ein falsche Grösse, ein Fehler, ein Schuld, welche diesem Armen nicht nur nichts wesentliches beytraget, sondern dasselbige im Falle, daß er etwann eines bekomen sollte, gleich einer Nulle machet; zumahlen so wir auch setzen, ein anderer schencke demselben 10 fl. die gemachte Schuld abzulösen, würde doch dadurch weiter nicht geholfen, als daß er sagen kunte, er habe nichts, dagegen aber sey er auch nichts schuldig. Diese Grössen werden minder als nichts genennet, weil man erst soviel geben muß, als man schuldig ist, ehe man nichts hat. Ubrigens ist ja diese Redens-Art nicht so fremd, daß man sie nicht täglich höre, da man öfters sagt; er bezahle 9 fl. weniger 17 kr. dieses Kind sey ein Jahr alt weniger 6. Wochen rc. dannenhero sind schlüßlich die falsche Grössen in der Algebraischen Rechnung mit bestem Fuge gegründet, keines wegs aber als unbegreifliche Dinge anzusehen.

§. IV.

Von Verbesserung der Algebraischen Ausdruckungen, und was ein coefficiente, exponente, homogenisch- und heterogenische Grösse sind.

15.) Es ist an der Verbesserung der Ausdruckungen viel, ja öfters die Auflösung einer Aufgabe gelegen, denn, daß wir andere unzähliche Vortheile jezt nicht gedenken, die sich in der Analysi zeigen werden, und ein jeder im rech-

nen

nen verspüren kan, wird dadurch unserer Einbildungs-Krafft die Sache deutlicher vor die Augen gestellet, die Vernunft in ihren Schlüssen befördert, und nebst dem daß die Ausdruckung viel zierlicher wird, viel an dem Raum ersparet; dahero, wenn sich der Fall ereignet, welcher öfters, ja schier allenthalben vorkommet, daß eine Grösse in einer Ausdruckung mehrmahl durch die Addition zum Vorscheine kommet, wird die Grösse nur einmahl mit beygesezten coefficienten angeschrieben. Z. E. Wenn $a + a$ oder $a + a + a$, oder $a + b + a - b + c - a$ in der Operation hervorkommen, setzet man besser in dem ersten Falle $2a$, in dem andern $3a$, und in dem dritten $a + c$ an; weil die übrigen Grössen durch die wiedrige Mehr- und Minder-Zeichen ausgelöschet werden. Die den Grössen durch die Addition vorgesezte Ziffer 2, 3 rc. heissen coefficienten, und wollen andeuten, wie oft ein Buchstab in einer Ausdruckung gestanden sey. Der coefficient einzeler Grössen ist die Einheit; weil eine jede Sache sich selbst einmahl enthält; deswegen kan a eben soviel als $1a$, b als $1b$. andeuten;

16.) Haben aber gedachte Grössen aa, aaa, oder bbbb ihren Ursprung von der Multiplication, so werden solche Multiplicationes Potenzen, oder Dignitäten genennet, und ist eine Grösse zu einer um so viel höheren Dignität erhoben, als sie mehrmahl in sich selbst ist multiplicieret worden; aa ist die zweyte Potenz von der Wurzel a, oder desselben Quadrat, und wird auch geschrieben a^2. Die dritte Dignität aaa von a, oder desselben Cubus, wird besser geschrieben a^3. Anstatt bbbb des Biquadrates der Wurzel b setzet man b^4. rc. die Zahlen 2, 3, 4. rc., so über die Buchstaben etwas weniges erhoben denselben nachgesezt werden, heissen bey den Gelehrten Exponente; Sie wollen anzeigen, wie oft eine Grösse in sich selbst multiplicirt worden sey. Der Exponente einzeler Grössen ist die Einheit, a, b, c, ist eben so viel als a^1, b^1, c^1, rc.

17.) Grössen, so mit gleichen Buchstaben, und Exponenten, ohne auf die Coefficienten acht zu geben, behaftet sind, heissen

gleichförmige Grössen, und können sowohl addiret, als subtrahiret werden. Dergleichen sind: a^2, $3a^2$, b^2, bc^2, ꝛc.

18.) Jenne Grössen, welche, ohne ihre Coefficienten in acht zu nehmen, Exponenten von gleicher Summe haben, werden homogenische Grössen benahmet; von dieser Art sind: $4a^1$, b^1, c^1. weil die Summe ihrer Exponenten $1 + 1 + 1$ gleiche sind. Eben also können wir diese: a^3, $4b^2$, c^1, $5a^1 b^1 c^1$, für homogenische Grössen annehmen, weil die Summe ihrer Exponenten, ohne auf die Coefficienten zu sehen, gleiche sind; denn die Exponenten von $4b^2 c^1$ sind $2 + 1 = 3$, und von $5a^1 b^1 c^1$ sind sie $1 + 1 + 1 = 3$. folgends beyde der ersten a^3 gleiche.

19.) Heterogenische Grössen werden genennet, die von eben so ungleicher Art, und Natur, als Holtz, und Stein, Wasser und Feuer sind; daher, und weil sie Exponenten von ungleicher Summe haben, als wie a und ab, a^2 und $a^2 b$ ꝛc. können sie nicht addiret, und auch nicht subtrahiret werden.

Das

Das Zweyte Capitel

Von den Vier ersten Algebraischen Operationen.

§. I.

Von der Addition einzeler Grössen.

20.) Addiren heisset eine Grösse finden, welche verschiedenen Grössen zusamen genommen gleiche ist: und daher wird die Additio eine Versamlung zweyer oder mehreren gleichförmigen Grössen (17) in eine Summe genennet. Die gegebene Grössen werden die Summirenden; die gefundene aber wird die Summe oder das Aggregat benahmet.

21.) Wenn mehrere mit + bezeichnete einzele Grössen, als a, b, c, d ꝛc. zu addiren sind, so wird eine nach der andern mit darzwischen gesezten Additions-Zeichen +, wie dahier: a + b + c + d. angeschrieben.

22.) Sind aber die Grössen Theils mit − und Theils mit + bezeichnet, so werden dergleichen Additiones in wahre Subtractiones verwandelt; denn man kan keinen Fehler betrachten, ohne sich einen Begriffe der Subtraction zu formiren. Z. E. Soll a + b zu weniger f addiret werden: da giebt die Summe a + b − f eine

falsche Grösse (14) – f, welche von der Summe a + b abzuziehen ist, folgends einen deutlichen Begriffe von der Subtraction.

23.) Im Falle, wo bey der Addition einzeler Grössen ein Buchstab in der Ausdruckung mehrmahl stehet, muß nach Lehre des vorhergehenden Capitels §. IV. n. 15. die Ausdruckung verbessert, und der Buchstab mit zugesezten Coefficiente nur einmahl geschrieben werden. Z. E. Sey gegeben a, b, b, a, c, a, c. schreibet nicht: a + a + a + b + b + c + c, sondern setzet eine jede Grösse nur einmahl, und gegen die Linke vorwärts einen Coefficienten, welcher anzeige, wie oft ein jeder Buchstab in der Ausdruckung gestanden sey, so giebet die Summe 3a + 2b + 2c.

24.) Alle Grössen, welche mit dem Minder-Zeichen bemerket werden, fehlen, und hingegen die das Zeichen + haben, sind vorhanden: diese wiedrige Zeichen heben ein ander auf; deswegen, wenn von beyden Arten zu addiren vorkommen, wird durch die lezteren der Mangel aufgehoben, und muß freylich die Addition in eine Subtraction verkehret werden; dannenhero auch, wenn in einer Ausdruckung eine mit gleichen Coefficienten behaftete Grösse jezt unter +, jezt unter – sich befindet, ist die Summe = 0. Sind aber die durch gleiche Buchstaben vorgestellte Grössen ungleiche, dergestalt, daß eine Grösser als die andere ist, so wird die kleinere von der Grösseren abgezogen, und was übergeblieben mit dem Zeichen der Grösseren bemerket. Z. E. Sollen addiret werden: a, a, a, b, b, und weniger a, a; schreibet anstatt 3a – 2a + 2b die Summe also: a + 2b; denn in Ansehung, daß in + 3a sich + 2a befinden, welche gegen die andere – 2a aufzuheben sind, bleibet von 3a nur noch ein a übrig.

25.) Die heterogenische Grössen (19.) werden mit darzwischen gesezten Additions-Zeichen + nach einander angeschrieben. So ist die Summe von $2a^3$ und $7a^2$ diese $2a^3 + 7a^2$. Ingleichen wenn $4b^3$, $7b^4$, und $5b^3$ zu addiren sind; so werden die zwey homogenische Grössen (18.) $4b^3$ und $5b^3$ in eine Summe gebracht,

und,

und, weil $7b^4$ gegen jenne heterogenisch sind (19.) können diese zu jennen nicht addiret werden; dahero giebet die Summe $9b^3 + 7b^4$.

§. II.

Von der Addition zusamengefügter Grössen.

26.) Bey der Addition zusamengefügter Grössen ist eben das, was bey den einfachen erinneret worden, zu beobachten. Ihr schreibet nemlich die gegebenen Grössen dergestalt unter einander, daß die von gleicher Art, und Buchstaben über einander zu stehen kommen, und ziehet unter den geschriebenen Grössen einen Strich; hernach in Erwegung, daß die Buchstaben undeterminirte Zahlen sind (2.) könnet ihr einen jeden als eines ansehen, und deswegen die Grössen, welche durch einerley Buchstaben benennet werden, als Dinge von gleicher Art zusamen zählen. Z. E. wenn ihr: $a + b + d$ zu $a + 2b + c$ addiren sollet, setzet ihr diese Grössen über einander, wie folget:

$$\begin{array}{cccc} a + & b + & & d \\ a + & 2b + & c & \\ \hline 2a + & 3b + & c + & d \end{array}$$

und sprechet: a und a ist 2a; setzet 2a unter den Strich unter a; und sagt ferners: b und 2b sind 3b. setzet die 3b unter den Strich an seinen gehörigen Ort; sprechet demnach; c und d ist $c + d$ (n. 21. §. I.) setzet $c + d$ unter den Strich zu den anderen, so kommet die gesuchte Summe $2a + 3b + c + d$ heraus.

27.) Es

27.) Es sey ferner zu addiren gegeben:

$$\begin{array}{r} 5a - 2b + 4c \phantom{{}+5d} \\ 3a + 3b + 2c \phantom{{}+5d} \\ 4a + b - 6c + 5d \\ -3a + 3b - 3c - 5d. \\ \hline 9a + 5b - 3c \quad * \end{array}$$

sprechet: 5 a und 3 a sind 8 a, noch 4 a dazu sind 12 a, weniger 3 a, sind 9 a; setzet 9 a unter die Reihe der a, und sprechet ferner: 3 b und b sind 4 b, noch 3 b dazu geben 7 b, weniger 2 b, bleiben + 5 b übrig; diese schreibet unter die Reihe der b, und sprechet abermahl: 4 c und 2 c sind 6 c, weniger 6 c, bleibet nichts (15. und 22.) noch weniger 3 c sind − 3 c. setzet − 3 c unter den Strich, und schreittet zu den d, sprechende: + 5 d und − 5 d heben einander auf (§. I. n. 24.) und schreibet an ihre Stelle ein o. oder Sternlein.

28.) Auf gleiche Weise, wenn ihr nachstehende

$$\begin{array}{r} 2ab - 4c^2 + 2d^2 \phantom{{}+5d^3} \\ -4ab + 3c^2 + 4d^2 \phantom{{}+5d^3} \\ 3ab - 7c^2 - 3d^2 \phantom{{}+5d^3} \\ 8ab + 2c^2 + 5d^3 \phantom{{}+5d^3} \\ \hline 9ab - 6c^2 + 3d^2 + 5d^3 \end{array}$$

Grössen addiren sollet, versamlet ihr nach gegebener Lehre die Grössen, welche das Mehr-Zeichen führen, und subtrahiret von der Summe, die unter − stehen, was übrig ist, schreibet ihr unter den Strich; auf solche Weise kommet bey a b für die gesuchte Summe 9 a b. heraus. In der andern Reihe werden gleichfalls die unter − stehende Grössen summiret, und davon die mit + bezeichnete subtrahiret, so bleiben − 6 c^2 übrig. In der dritten Reihe werden

die homogenische Grössen, wie bisher, gezählet, und die heterogenische $5d^3$ nach Lehre des ersten Capitels angeschrieben.

Auszug

29.) Aus den vorhergehenden Operationen erhellet, daß die ganze Kunst der Algebraischen Addition darinnen bestehe:

I. Daß Mehrere gleiche Grössen, nach beygefügten Coefficienten (15.) nur mit einem Buchstabe geschrieben werden.

II. Daß, wenn die Grössen einerley Zeichen haben, man sie wie in der Rechen-Kunst zusamen zehle.

III. Daß, wenn die Zeichen verschieden sind, man die Kleinere, von den Grösseren abziehe, und zu dem, was überbleibet, das Zeichen der Grössern setze.

IV. Daß die heterogenische Grössen nacheinander angeschrieben werden.

§. III.

Von der Subtraction einfacher Grössen.

30.) Subtrahiren, oder abziehen ist soviel als eine Zahl finden, welche mit einer gegebenen Zahl zusamen genommen einer anderen gegebenen Grösse gleich ist. Die Grosse, welche durch Subtrahiren gefunden wird, heisset die Differenz oder der Unterscheid der gegebenen Grössen.

31.) Wenn einfache Grössen zu subtrahiren vorkommen, kan es sich ereignen I.) Daß beyde Grössen das Mehr-Zeichen II.) Das Minder-Zeichen III.) Daß die Grössen, von welcher die

Subtraction geschehen solte, das Mehr-Zeichen, oder IV.) Das Minder-Zeichen führen. In allen diesen Fällen erfordert die allgemeine Regel, daß man das Zeichen der Grösse, welche abgezogen werden soll, verändere, das ist, daß man das + in –, und – in + verkehre. Demnach, wenn einerley Zeichen vorhanden sind, und ihr sollet das Kleinere von dem Grösseren abziehen, verrichtet ihr die Subtraction, wie in Zifferen. Sollet ihr aber die Grössere von der Kleineren abziehen, so ziehet die Kleinere von der Grösseren ab, und setzet zu dem übrigen das Minder-Zeichen, wenn die Grossen + haben; hingegen das Mehr-Zeichen, wenn sie – haben. Im Falle, wo die Zeichen verschieden sind, werden die Grössen, so man von einander abziehen sollte, zusamen addiret, und zu der Summe das Zeichen derjenigen Grösse, von welcher die Subtraction geschehen sollte, gesetzet. Damit wir aber die Sache nach möglicher Deutlichkeit abhandeln, wollen wir zu den Exempeln schreitten; denn die Algebra lernet man nicht sowohl durch Regeln, als durch Exempel. Zu diesem Ende sey von a grösser als b das b. abzuziehen, ich sage, der Unterscheid sey a – b. zu dessen Beweiß wollen wir setzen a sey ein Maaß, und b ein Kleineres; so wird es klar, daß nach abgezogenem kleinerem Maaß b von dem grösseren a etwas überbleiben müsse; gleichwie wenn 4. fl. von 10. fl. abgezogen werden, der Unterscheid 10. fl. – 4. fl. = 6. fl. ist. Setzen wir aber a = b, so ist die Differenz a – b = 0. denn, wenn 10. fl. von 10. fl. genommen werden, kan nichts übrig bleiben.

32.) Es sey – b von – a abzuziehen; die Differenz zeiget: – a + b; zum Beweiß setzen wir – a = – 10. fl. eine Schuld, und – b = – 4. fl. ein Nachlaß an der Schuld; wenn ihr nun wissen wollet, wie groß die Schuld, nach beschehenem Nachlaß, verbleibe, müsset ihr den Nachlaß – 4. fl. von der Schuld – 10. fl. abziehen; so bleiben – 10. fl. + 4. fl. = – 6. fl. übrig.

33.) Wenn + a von – b abgezogen wird, so bleibet – b – a übrig; gleichwie, wenn einer 10. fl. schuldig ist, und noch dazu 4. fl. entlehnet, seine Schuld – 10. fl. – 4. fl. wird, und anstatt er vor-

hin

hin nur eine Schuld – 10. fl. zu bezahlen hatte, hat er jezt zwey Schulden – 10. – 4. fl. zu entrichten. Soll man aber – a von + b abziehen, so ist der Unterscheid + b + a; denn, so ihr 10. fl. vermöget, und euch ein anderer noch 4. fl. dazu schencket, vermehret sich euer Vermögen um 4. fl. und ist 10. fl. + 4. fl. = 14. fl.

34.) Wenn b grösser als a von a abgezogen wird, kan von a nichts überbleiben; weil hierzu erfordert wurde, daß das a grösser wäre als b. dennoch kan der Unterscheid auch nicht = o seyn; weil beyde Grössen ungleich waren; dannenhero muß etwas überbleiben, welches geringer als nichts ist (14.) zu dessen Beweiß wollen wir nach vorigem Beyspiel setzen, die Maaß a sey kleiner als b, welches man subtrahiren solle, und in Gedancken das b in zwey Theile unterscheiden, den einen = a, und den anderen = c machen; so wird es klar, daß, wenn von a das halbe b = a abgezogen wird, das übergebliebene = o. sey; weil wir beyde Theile gleiche gemacht haben. Endlich, wenn ihr nach abgezogener ersten helffte a noch ferner die andere helffte = c von eben dem a = b, oder besser zu reden, von desselben Reste = o subtrahiren sollet, verbleibet o – c. da nun aber c eine wesentliche Grösse ist, und von o nicht abgezogen werden kan, so folget, daß das c zwar geringer als nichts, dennoch eine wahre Grösse sey.

35.) Im Falle, wo b – c von a abgezogen werden solle, ist zu merken, daß man b nicht ganz, sondern nur dessen Reste, nachdem c davon ist abgezogen worden, noch abzuziehen habe; deßwegen, wenn man b ganz abziehet, wird c zu viel abgezogen, folgends muß das zu viel abgezogene wieder ersetzet werden; dieses kan nicht anders geschehen, als wenn man – c in + c verkehret, und für den gesuchten Unterscheide a – b + c anschreibet.

36.) Eben also, wenn – c – d von a abgezogen wird, ist zu erwegen, daß dieses eben so viel sey, als wenn ihr o – c – d abziehen solltet; da aber wurdet ihr sagen: o von a abgezogen, bleibet a. auf diese Weise aber ziehet ihr das o ganz, folgends zwey Theile c und d zu viel ab, welche ihr wieder ersetzen müsset; dieses

geschiehet, wenn ihr die Zeichen der Grössen, von welchen die Subtraction geschehen sollte, veränderet, und für die gesuchte Differenz $a + c + d$ anschreibet.

37.) Wenn $+ a$ von $- a$ abgezogen wird, ist der Unterscheid $- 2a$; wird aber $- a$ von $+ a$ abgezogen, so bleiben $+ 2a$ übrig; denn, weil die Zeichen verschieden sind, müssen die Grössen addiret, und mit dem Zeichen der Grösse, von welcher die Subtraction geschehen sollte, bemerket werden; wie oben gelehrt worden.

38.) Die Coefficienten, welche bey den Grössen stehen, werden von einander abgezogen. Z. E. Wenn $+ 2a$ von $+ 3a$ abgezogen werden, so ist die gesuchte Differenz $= a$.

39.) Die Coefficienten, welche Grössen von verschiedenen Zeichen begleiten, werden in eine Summe gebracht. Z. E. Wenn $- 4a$ von $+ 3a$ zu subtrahiren sind, ist der Unterscheid $= 7a$.

§. IV.

Von der Subtraction zusamengefügter Grössen.

40.) Bey der Subtraction zusamengefügter Grössen ist eben das, was bey den einfachen gelehrt worden, zu beobachten. Nemlich die gegebenen Grössen werden auf die Art, wie im Addiren geschehen, unter einander geschrieben, und darunter ein Strich gezogen; hernach aber subtrahiret man besonders die Grössen von gleicher Art und Buchstabe von einander, und setzet allezeit die Grösse, so übrig bleibet, an ihren gehörigen Ort unter den vorhin gezogenen Strich. Z. E. Wenn ihr folgende Grössen von einander subtrahiren sollet, setzet ihr dieselbe, wie dahier:

$2a + b$

$$\begin{array}{r} 2a + b \\ a - b \\ \hline a + 2b \end{array}$$

Und sprechet: a von 2 a lässet a; schreibet a unter den Strich in die Stelle von a. Auf solche Weise aber habet ihr das a gantz abgezogen, welches nicht hätte geschehen sollen; denn ihr habet das b zu viel abgezogen; weil ihr nur a weniger b abziehen soltet; dahero müsset ihr das, was zu viel abgezogen worden, wieder ersetzen, folgends nach Lehre des vorhergehenden §. n. 35. für das übergebliebene a + 2 b anschreiben.

41.) Es sey ferner zu subtrahiren gegeben:

$$\begin{array}{r} 3a - 3b \\ 2a - 5b \\ \hline a + 2b \end{array}$$

sprechet: 2 a von 3 a lässet a; schreibet a unter den Strich in die Stelle der a. Auf diese Weise aber ziehet ihr zu viel 5 b ab; weil ihr nur 2 a weniger 5 b hättet abziehen sollen; deswegen müsset ihr selbe wieder ersetzen mit + 5 b; da ersetzet ihr aber zu viel + 3 b; denn ihr sollet ja nur − 5 b von − 3 b abziehen; wenn nun auch dieses geschehen, so bleiben euch a + 2 b übrig.

42.) Ein gleiche Beschaffenheit hat es in dem folgenden Exempel:

$$\begin{array}{r} 5m + 3g \\ 2m + 6g \\ \hline 3m - 3g \end{array}$$

Nehmet 2 m von 5 m, so bleiben 3 m übrig, die ihr unter den Strich in die Stelle der m schreibet, und sprechet weiter: 6 g von 3 g kan ich nicht wegnehmen; deswegen bildet euch ein, es seyen

6 g anstatt 3 g gegeben, und ziehet diese von jennen ab, so verbleibet nichts. Da ihr aber der Grösse, von welcher die Subtraction geschehen sollte, 3 g zu viel angedichtet, müsset ihr dieselbe wieder wegnehmen, folgends für den gesuchten Unterscheide 3 m − 3 g anschreiben.

43.) Auf gleiche Weise verfahret ihr auch in dieser Aufgabe:

$$\begin{array}{r} 5a - 7b + 3c - 6d \\ 2a - 2b + 2c + 4d \\ \hline 3a - 5b + c - 10d \end{array}$$

sprechet: 2 a von 5 a abgezogen lassen 3 a; schreibet 3 a unter den Strich in die Stelle der a. und sprechet ferner: − 2 b von − 7 b lassen − 5 b übrig, schreibet − 5 b an sein gehörigen Ort; und sprechet weiter: 2 c von 3 c lässet c, schreibet wiederum c unter den Strich. Nun weil von − 6 d nicht können + 4 d abgezogen werden, so addiret + 4 d wegen den wiedrigen Zeichen zu − 6 d, und setzet zu der Summe das Minder-Zeichen der Grösse − 6 d, von welcher die Subtraction hätte geschehen sollen; wenn ihr also verfahret, so kommet die gesuchte Differenz 3 a − 5 b + c − 10 d heraus.

44.) Endlich wollen wir zur bessern Ubung noch folgendes Exempel machen:

$$\begin{array}{l} 5a - 3x + 4c - d + b \\ 2a - 4x + 7c - 3d - 2b + 4f \\ \hline 3a + x - 3c + 2d + 3b - 4f. \end{array}$$

Ich nehme 2 a von 5 a, so bleiben 3 a übrig, diese schreibe ich unter den Strich, und sag: ich kan − 4 x von − 3 x nicht wegnehmen, deswegen bilde mir ein, es seyen auf beyden Seiten − 4 x, und ziehe diese von jennen ab, so bleibet nichts übrig; da aber auf solche Weise der Grösse, von welcher die Subtraction geschehen sollte, ein x zu viel angedichtet wird, muß dasselbe wieder weggenommen wer-

werden; dieses aber kan anders nicht geschehen, weil die – 3 x für eine Schuld anzusehen sind (14.) als wenn ich die Schuld in baares Gelt, und Dinge, welche vorhanden sind, verkehre, oder anstatt – das + setze, und für den Reste + x anschreibe. Bey dem dritten und vierten Gliede hat es ein gleiche Beschaffenheit. In dem fünften wird das Zeichen + in – verändert, und für den gesuchten ganzen Unterscheide 3 a + x – 3 c + 2 d + 3 b – 4 f angeschrieben.

§. V.

Von der Multiplication einfacher Grössen.

45.) Die dritte Algebraische Operation heisset Multiplication; es ist aber multipliciren eine Grösse finden aus zwey gegebenen Grössen, in welcher die eine von den gegebenen so viel mahl enthalten ist, als die andere von ihnen Eines in sich begreiffet. Die Grösse, so gefunden wird, heisset das Producte, oder factum: die gegebene Grössen werden die factores genennet. Die Multiplication wird verrichtet, wenn die Grössen, welche einander multipliciren sollen, neben einander ohne einiges Zeichen gesetzet werden; so schreibet man, wenn a durch b multipliciret wird, das Producte also: a b.

46.) Die Coefficienten, welche die Grössen begleiten, werden durch einander multipliciret, und das Producte, so herauskommet, giebet den Coefficienten des neuen Productes. Ihr sollet Z. E. 4 c durch 5 d multipliciren, so sprechet: 4 mahl 5 ist 20, und c durch d multipliciret, giebet c d (45.) folgends ist das gesuchte Producte 20 c d.

47.) Hingegen, wenn die Grössen mit Exponenten behafftet sind, werden die, so bey Grössen von gleicher Art stehen, in eine

Summe

Summe gebracht; alsdenn ist der Exponent des neuen Productes die Summe, welche herauskommet. Z. E. a^3 durch a^2 multipliciret, giebet dem Producte a^5. Folgends, wenn bey den grössen Coefficienten, und Exponenten zugleich mit einander stehen, werden jenne durch einander multipliciret, und diese zusamen addiret, so geben die Producte, und Summe die Coefficienten und exponenten des neuen Productes. Z. E. Wenn ihr $a^2\ b^3\ c$ durch $a\ b^2\ c^3\ d$ multipliciren sollet, dörffet ihr nur für das gesuchte Producte $a^3\ b^5\ c^4\ d$ anschreiben; denn $a^2\ b^3\ c$ ist eben so viel als $a\,a\ b\,b\,b\,c$, und $a b^2\ c^3\ d$ gilt so viel als $a\ b\,b\ c\,c\,c\ d$. Wenn nun $a\,a\ b\,b\,b\ c$ durch $a\ b\,b\ c\,c\,c\ d$ multipliciret wird, werden die Grössen, welche einander multipliciren sollen, neben einander gesetzet (45.) geschiehet dieses, so komet $a\,a\,a\ b\,b\,b\,b\,b\ c\,c\,c\,c\ d$ heraus, folgends nach verbesserter Ausdruckung $a^3\ b^5\ c^4 d$ (15.)

48.) Einerley Zeichen geben im Producte +, verschiedene aber –; dannenhero, wenn Grössen, die aus verschiedenen Theilen bestehen, zu multipliciren sind, müssen alle Theile der Grössen, so einander multipliciren sollen, durch einander multipliciret werden; da nun aber die Zeichen auch unter die Theile der Grössen gehören, so folget, daß man auch die Zeichen multipliciren müsse, wie wir in dem folgenden §. mit mehrerm darthun werden. Jezt sey $a + b$ durch c zu multipliciren; stehet also:

$$\begin{array}{l} a + b \\ c \\ \hline ac + bc \end{array}$$

sprechet: a durch c multipliciret, giebet im Producte ac: hernach, weil c eben so viel als $+ c$ ist (13.) sprechet ihr ferner + durch + giebet +, und b durch c giebet $b c$, (45.) folgends ist das ganze Producte: $ac + bc$.

49.) Eine

49.) Eine gleiche Beschaffenheit hat folgendes Exempel:

$$\begin{array}{l} a - x \\ m \\ \hline am - mx \end{array}$$

sprechet: a durch m multipliciret, giebet im Producte am, schreibet am unter den Strich; und, weil m eben so viel als + m ist (13.) sprechet weiter: + durch − giebet − (48.) und m durch x giebet mx (45.) folgends ist das ganze Producte am − mx; denn, wenn a − x durch m multipliciret werden soll, muß man wohl erwegen, daß man ja nicht das ganze a, sondern nur desselben Rest, nachdem x ist abgezogen worden, zu multipliciren habe; deswegen, wenn, man am setzet, wird das ganze a multipliciret, welches nicht geschehen sollte; weil auf solche Weise am auch den Theil x durch m multipliciret in sich begreiffet; folgends muß man das, was das Producte am zu viel in sich enthält, demselben wieder wegnehmen: dieses geschiehet, wenn dem Theile mx das Minder-Zeichen beygefüget wird; denn so kommet das Producte am - mx heraus.

50.) Wenn ihr − a durch b multipliciren sollet, so erweget, daß − a eben so viel als ⌀ − a sey; setzet b unter ⌀, welches ihr mit einem Strichlein zum Unterscheide des o. tau durchstreichen könnet, stehet also:

$$\begin{array}{l} \emptyset - a \\ b \\ \hline \emptyset b - ab = - ab. \end{array}$$

sprechet: ⌀ durch b multipliciret, giebet ⌀b. setzet ⌀b an seine gehörige Stelle unter den Strich, und sprechet ferner: − durch + giebet − (48.) und a durch b giebet ab; zusamen − ab. Nun aber ist ⌀ b = o; weil ⌀ oder eine Nulle unfähig ist zu multipliciren; deswegen ist das Producte − a b.

51.) Auf gleiche Weise verfahret ihr auch in der nachstehenden Aufgabe:

$$\begin{array}{l} \phi - a \\ \phi - a \\ \hline \phi\phi - a\phi \\ \quad\;\; - a\phi + aa \\ \hline \phi\phi - 2a\phi + aa = aa. \end{array}$$

sprechet: ϕ durch ϕ multipliciret, giebet im Producte $\phi\phi$. setzet $\phi\phi$ unter den Strich, und sprechet ferner: + durch — giebet — (48.), und ϕ durch a giebet aϕ (45.), zusamen – a ϕ, setzet – a ϕ in sein gehörigen Ort, und sprechet weiter: – a durch ϕ multipliciret, giebet – a ϕ, wie vorhin, schreibet – a ϕ unter das vorige – aϕ, und sprechet abermahl: – durch – giebet + (48.), und a durch a giebet a a (45.), schreibet + a a unter den Strich um eine Reihe weiter hinaus. Solchergestalt ist die Multiplication fertig; weil alle Theil der zu multiplicirenden Grössen in einander sind multipliciret worden; bleibet also nichts mehr zu thun übrig, als daß man die Facta zusamen addire, so giebet das ganze Producte: $\phi\phi - 2a\phi + aa = aa$; denn das erste Glied bestehet in zwey ϕ oder Nullen, folgsam in nichts: das andere in 2 a ϕ, welches sich, wie das erste, auf nichts reduciret, weil (50.) ein ϕ nicht fähig seyn kan, daß es eine andere Grösse multiplicire; deswegen bleibet nur das dritte Glied + a a übrig. W. Z. E.

§. VI.

Von der Multiplication zusamengefügter Grössen.

52.) Schreibet die eine Grösse dergestalt unter die andere, daß, wie in der Addition geschehen, die von gleicher Art und Buchstabe unter einander zustehen kommen, unter die geschriebenen Grössen ziehet einen Strich, und schreibet

darunter

darunter alle Producte aus einem jeden Theile der unteren Grössen in einen jeden Theile der Oberen, endlich addiret diese Producte zusamen, so giebet die Summe, so herauskommet, das Producte, welches man finden sollte.

53.) Bey dem multipliciren ist nicht genug nur allein die Grössen zu multipliciren; es müssen auch ihre Zeichen multipliciret werden; dabey aber kan folgende schon oben n. 48. gegebene allgemeine Regel mit grossem Vortheile angebracht werden: nemlich + durch +, und – durch – geben +; hingegen + durch –, oder – durch + geben –; das ist, einerley Zeichen geben im Producte +, verschiedene aber –. Diese Regel wurde vor Zeiten wegen ihrer Dunkelheit die Esels-Brücke benahmet. Nun lasset uns sehen, ob derselben Dunkelheit eher der Regel selbst, als der dunkeln Weise dieselbe zu erklären zuzuschreiben gewesen sey.

54.) Multipliciren ist eine Grösse finden aus zwey gegebenen Grössen, in welcher die eine von den gegebenen so viel mahl enthalten ist, als die andere von ihnen Einheiten in sich begreiffet (45.); deswegen, wenn der Multiplicator 3. 4. 5. 6 ꝛc. Einheiten enthält, muß der Multiplicandus 3. 4. 5. 6 ꝛc. mahl angenohmen werden: hingegen, wenn der Multiplicator gar keine Einheiten enthält, wird der Multiplicandus auch nicht multipliciret (50. und 51.) daher kommet es auch, daß im Falle, wo der Multiplicator, anstatt, daß er 2. 3. 4 ꝛc. Einheiten in sich begreiffen sollte, weniger 2, weniger 3, weniger 4 ꝛc. Einheiten enthält, man den Multiplicandum weniger 2, weniger 3, weniger 4 ꝛc. mahl ansetzen müsse; demnach ist die nothwendige Folge, daß, sofern wir dafür halten, der Multiplicandus habe das Mehr-Zeichen, und + durch + multipliciren, das Producte auch + gebe. Jngleichen ist nicht schwer zu begreiffen, daß in dem Producte das Minder-Zeichen seyn muß, wenn man + durch – multipliciret; weil eine Schuld etliche mahl angenommen wird. Folgends ist bewiesen, daß + durch + im Producte +, und + durch – im Producte – gebe.

55.) Hingegen setzen wir, der Multiplicandus habe das Minder- und der Multiplicator das Mehr-Zeichen, dergestalt, daß er 2. 3. 4 ꝛc. Einheiten enthält, so ist es klar, daß man den Multiplicandum 2. 3. 4 ꝛc. mahl anzuschreiben habe. Da nun dieser ein Schuld ist (14.) muß auch das Producte dieselbe 2. 3. 4 ꝛc. mahl in sich begreiffen, folgsam das Minder-Zeichen führen; dannenhero ist abermahl erwiesen, daß – durch + im Producte – gebe.

56.) Wenn – durch – multiplicieret wird, scheinet es nicht gleich klar zu seyn, warum in dem Producte + ist. Allein, wenn wir setzen, der Multiplicator, und Multiplicandus seyen mit dem Minder-Zeichen bemerket, dergestalt, daß der Multiplicator, anstatt er 2. 3. 4 ꝛc. Einheiten enthielte, weniger 2, weniger 3, weniger 4 ꝛc. Einheiten in sich begreiffe, wird es schon klärer, daß der Multiplicandus, welcher eine Schuld ist, weil er das Minder-Zeichen führet (14.) nicht 2, nicht 3, nicht 4, ꝛc. mahl, sondern weniger 2, weniger 3, weniger 4 ꝛc. mahl angenommen werden müsse. Da man aber eine Schuld weniger nicht haben kan, ohne zugleich das wiedrige der Schuld zu haben, folget, daß, anstatt man den Multiplicandum, der dahier für eine Schuld angesehen wird, weil er das Minder-Zeichen führet (14.), weniger 2, weniger 3, weniger 4 ꝛc. mahl annehme, man das wiedrige der Schuld 2. 3. 4 ꝛc. mahl ansetzen, und folgends dem Producte das Mehr-Zeichen zueignen müsse; weil das wiedrige dem – das + ist. Z. E. Wenn ihr 3 – 2 durch – 2 multipliciren sollet, so müsset ihr ja den Mangel – 2 so viel mahl nemmen, als 3 – 2 Einheiten hat, das ist, 1. mahl. Da ihr nun Anfangs 3 mit – 2 multipliciret, so nehmet ihr den Mangel 3 mahl, und demnach 2 mahl zu viel; derowegen müsset ihr ihn noch zweymahl dazu wieder addiren (49.) und also giebet – 2 mit – 2 zum Producte + 4. W. Z. E. solchergestalt verhoffe ich, ihr werdet die Esels-Brücke ganz glücklich übersteigen, wenn ihr diese Beweise euch ernstlich zu Gemüthe führet; deswegen wollen wir uns dahier nicht länger aufhalten, sondern zu den Exempeln, die diese so nützliche Lehren noch besser erklären werden, fortschreitten. Zu diesem Ende sey zu multipliciren

gegeben

$$
\begin{array}{llll}
a & + & b & \text{durch} \\
a & - & b & \\
\hline
aa & +ab & & \\
 & -ab & -bb & \\
\hline
aa & * & -bb &
\end{array}
$$

sprechet: a durch a giebet aa, schreibet aa unter den Strich an seinen gehörigen Ort, und sprechet ferner: weil a eben so viel, als + a ist (13.) so giebet + durch + wieder + (84. & 85.) und a durch b giebet ab (45.) schreibet + ab unter die Reihe von b, und sprechet weiter: – durch + giebet – (48. und 55.) und b durch a giebet ab (45.) schreibet – ab unter + ab, und sprechet abermahl: – durch + giebet – (48 und 55.); hernach b durch b giebet bb (45.) schreibet – bb neben – ab unter den Strich, und addiret alle Theile dieses Productes zusamen, so ist ihre Summe aa – bb; weil + ab gegen – ab aufgehoben wird (24.)

57.) Die Coefficienten, welche bey den Grössen stehen, werden, wie in der gemeinen Rechnung, durch einander multipliciret. Z. E. Wenn 3a + 2b – c durch 2a + 2b – 3c zu multipliciren sind, setzet ihr die gegebene Grössen solchergestalt unter einander:

$$
\begin{array}{llllll}
3a & +2b & -c & & & \\
2a & +2b & -3c & & & \\
\hline
6aa & +4ab & -2ac & & & \\
 & +6ab & +4bb & -2bc & & \\
 & & -9ac & -6bc & +3cc & \\
\hline
6aa & +10ab & -11ac & +4bb & -8bc & +3cc
\end{array}
$$

Und sprechet: + durch + giebet +, lasset aber das Zeichen Anfangs der Operation aus, weil es auch in der Aufgabe weggelassen worden; [13.] hernach; 2 mahl 3 ist 6 [46.] und a durch a giebet aa [45.] zusamen aber 6aa; schreibet 6aa unter die Reihe von a,,

 und

und sprechet weiter: + durch + giebet + [48 und 54.] 2 mahl 2 ist 4, und a durch b giebet ab [45.] schreibet + 4ab in die Stelle von b; und sprechet ferner: + durch − giebet − [48 und 54.] und 2a durch c giebt 2ac, schreibet − 2ac unter den Strich, und multipliciret mit + 2b sprechende: + durch + giebet + [48 und 54.] 2 mahl 3 ist 6, und b durch a giebet ab, zusamen + 6ab, schreibet + 6ab unter dem Multiplicatorn + 2b, und sprechet weiter: + durch + giebet + [48 und 54.] 2 mahl 2 ist 4, und b durch b giebet bb [45.] zusamen + 4bb schreibet + 4bb um eine Reihe weiter gegen die Rechte neben 6ab, und sprechet ferner: + durch − giebet − [48 und 54.]; 2b durch c giebet 2bc, zusamen − 2bc; schreibet − 2bc nun eine Reihe weiter gegen die Rechte neben 4bb, und sprechet abermahl: − durch + − [48 und 55.] 3 mahl 3 ist 9, und c durch a giebet ac [45.] zusamen − 9ac; schreibet − 9ac unter die Reihe von c, oder unter 2ac, und sprechet weiter: − durch + giebet − [48 und 55.], 2 mahl 3 ist 6, und c durch b giebet bc, zusamen aber − 6bc; schreibet − 6bc um eine Reihe weiter gegen die Rechte, und sprechet endlich: − durch − giebt + [48 und 56.] und 3c durch c geben 3cc [45.] schreibet + 3cc an seinen gehörigen Ort, wie in der Operation zu sehen, so ist die Multiplication fertig, und nichts mehr zu thun übrig, als daß man die verschiedene Producte in eine Summe bringe; dieses aber geschiehet, wenn ihr die Additions-Regeln, wie wir dieselbe §. II. Cap. II. vorgetragen haben, wohl beobachtet; denn solchergestalt wird das Producte: 6aa + 10ab − 11ac + 4bb − 8bc + 3cc herauskommen.

§. VII.

Von der Division einfacher Grössen.

58.) Die Division zertheilet, was die Multiplication durch Vermehrung der in dem Multiplicando enthaltenen Einheiten zusamen gefüget hat; denn dividiren ist eine Grösse finden aus zwey gegebenen Grössen, welche andeutet,

wie

wie vielmahl die eine von den gegebenen in der andern enthalten ist, und dannenhero quotus, oder der quotient genennet wird; die gegebene Grösse, welche dividiren soll, wird Divisor, und die, welche dividiret werden soll, der Dividendus geheissen. Die Grössen, welche in der Division vorkommen, haben entweder das Mehr- oder das Minder- Zeichen; gleichwie aber in der Multiplication diese Zeichen multiplicieret worden, so müssen auch dieselbe dahier in der Division dividiret werden; deswegen ist klar, daß auch in der Division die Regel gilt: einerley Zeichen geben im Quotienten + verschiedene aber −.

59.) Wenn eine gegebene Grösse durch die andere sich würcklich dividiren lässet; so muß man verfahren, wie in Zahlen, nur daß die Regel [58.] von Veränderungen der Zeichen wohl in Acht genommen wird. Kan aber die Division nicht würcklich geschehen, so werden die Buchstaben, welche einander dividiren sollen, wie in der Rechen-Kunst ein Bruch geschrieben. Z. E. Wenn a durch b dividiret werden soll, so schreibet man den Quotienten entweder a: b, oder $\frac{a}{b}$ und spricht es beyderseits aus: a durch b dividiret.

Wenn eine Grösse viel andere auf einmahl dividiret, oder viel andere eine dividiren, so werden, die vielen in eine Parenthesin [ ] eingeschlossen, oder man kan auch an deren Statt ein Comma brauchen. Z. E. Wenn a + b durch c dividiret werden soll, so schreibet den Quotienten entweder [a + b]: c, oder a + b, : c sollet ihr a durch b + c dividiren, so ist der Quotient dieser: a : [b + c] oder a:, b + c. Wiederum wenn ihr a + b durch c + d dividiret, so schreibet den Quotienten [a + b]: [c + d] oder a + b,:, c + d. Nach der gemeinen Art schreibet ihr diese Quotienten $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a+b}{c+d}$ oder auch $a + b : c$, $a : \overline{b + c}$, $\overline{a + b} : \overline{c + d}$.

60.) Wenn der Divisor, und dividendus mit einerley Buchstaben, coefficienten, und exponenten begleitet werden, wird z. E. anstatt + oder $-\frac{a}{a}$ besser + oder − i. geschrieben; weil a in sich selbst einmahl enthalten, und ein jede Grösse ihr selber gleiche ist. Eben also wird, wenn der dividendus − 3 a, und der Divisor − a ist, anstatt $+\frac{3\,a}{a}$ nur + 3 geschrieben; denn in 3 a ist a dreymahl enthalten. Eine gleiche Beschaffenheit hat es, wenn der dividendus + a b, und der Divisor − a ist; denn da schreibet man anstatt $\frac{-\,a\,b}{a}$ nur − b; weil a b das Producte von a mit b vorstellet, so folget, das − b der richtige Quotient sey.

61.) Hieraus fliesset diese allgemeine Lehre, daß im Falle, wo sich in einer Division Grössen von einerley Buchstaben, coefficienten, und exponenten befinden, man nur die gleiche Buchstaben in dem dividendo. durchstreichen, und die übergebliebene für den gesuchten Quotienten anschreiben dörfe. Z. E. Wenn $\frac{a\,b\,c}{a\,b\,d}$ zum Vorscheine kommet, dörfet ihr nur a b in dem dividendo, gegen a b in dem Divisore auslöschen, und für den Quotiente das übergebliebene $\frac{c}{d}$ annehmen; denn, weil der Zehler a b c das Producte von c durch a b, und der Nenner a b d das Producte von d durch a b vorstellet, muß, wenn man beyde mit a b dividiret, der Quotient $\frac{c}{d}$ herauskommen.

62.) Im Falle, wo bey dem Divisore, und dividendo coefficienten sind, müssen diese mit jennen, wie in der Rechen-Kunst, dividiret werden. Z. E. Wenn 18 a b c durch 6 a c zu dividiren sind, so

so sprechet ihr: 6 ist in 18 zu dreymahl enthalten; denn 3 mahl 6 ist 18; hernach fraget: welches jenne Grösse sey, welche, wenn sie a c multipliciret, zum Producte a b c giebet? und antwortet mit b; folgends ist der gesuchte Quotient 3 b. denn $3b \times 6ac = 18abc$. Auf gleiche Weise findet ihr den Quotienten von 12 a b c in $3c = \frac{4ab}{c}$

63.) Wenn der dividendus mit einem Exponente begleitet wird, muß der Exponente des Divisoris von dem Exponente des dividendi abgezogen, und, was überbleibet, für der gesuchte Quotiente angenohmen werden. Z. E. Wenn ihr a^3 mit a^2 dividiren sollet, so müsset ihr 2 von 3 abziehen, und für den Quotiente a anschreiben. Eine gleiche Beschaffenheit hat es, wenn $9b^4c^3$ durch $3b^2c^4d^2$ dividiret wird; denn da giebet der Quotient: $\frac{3b^2}{cd}$.

§. VIII.

Von der Division zusamengefügter Grössen.

64.) Die Division zusamengefügter Grössen wird eben so, wie die deren einfachen verrichtet; ihr schreibet nemlich die gegebenen Grössen gewöhnlicher Maassen vor euch, und den Quotum nebens auf die Seite, wie in der nachstehenden Operation zu ersehen. Z. E. Sey $aa + 2ab + bb$ durch $a + b$ zu dividiren; setzet die Grössen wie folget:

$aa + 2ab + bb$	$a + b$ Divisor.
$aa + ba$	
$* \quad ab + bb$	$a + b$ Quotient.
$ab + bb$	
$* \quad *$	

Und sprechet: aa durch a dividiret, giebet dem Quotiente a; denn $a \times a = aa$. Schreibet a unter den Nebens-Strich, und multipliciret durch den Quotiente a den ganzen Divisorem, das Producte $aa + ab$, welches heraus kommet, schreibet unter den dividendum, und ziehet dieses von jennem ab, so ist der Rest: $ab + bb$. Alsdenn sprechet ferner: ab durch a dividiret, giebet dem Quotiente b; denn $b \times a = ab$. Setzet b an seinen gehörigen Ort, und multiplicirer abermahl den ganzen Divisorem mit dem Quotiente b; hernach schreibet das Producte $ab + bb$ unter den Rest des dividendi, und ziehet dieses von jennem ab, so

65.) Die Coefficienten, welche bey den Grössen stehen, werden wie in der gemeinen Rechnung dividiret; das übrige aber nach bisheriger Lehre verrichtet. Z. E. Sey $6aa + 10ab - 11ac + 4bb - 8bc + 3cc$ durch $3a + 2b - c$ zu dividiren, stehet also:

$6aa + 10ab - 11ac + 4bb - 8bc + 3cc$	$3a + 2b - c$ divis.
$6aa + 4ab - 2ac$	$2a + 2b - 3c$
$* + 6ab - 9ac + 4bb - 8bc + 3cc$	
$+ 6ab + 4bb - 2bc$	
$* - 9ac * - 6bc + 3cc$	
$- 9ac - 6bc + 3cc$	
$* \quad * \quad *$	

Fraget, wie viel mahl der Coefficient des Divisoris in dem Coefficiente des dividendi enthalten sey? die Zahl, wormit ihr antwortet, ist der Quotient, den ihr suchet: diesen setzet nebens unter den Strich, und dividiret mit den Buchstaben, wie bisher geschehen. Ihr sprechet nemlich: 3a ist in 6aa zweymahl enthalten, folgends ist der gesuchte Quotient 2a; schreibet 2a in die Stelle des Quotienten, und multipliciret dadurch den ganzen Divisorem; die herauskommende Producte ziehet von dem dividendo ab, und was nach geschehener Subtraction übrig geblieben, schreibet unten an; demnach fanget ihr wieder an mit dem ersten Gliede [3a.] des Divi-

soris

soris in das übergebliebene zu dividiren, und fahret so fort, bis euch nichts mehr zu dividiren überbleibet. Wenn ihr nun solchergestalt euere Rechnung fortsetzet, so findet ihr den völligen Quotienten $2a + 2b - 3c$ zu seyn.

66.) In dem Falle, wo die Subtraction nicht kan verrichtet werden; weil die Glieder, so durch die Multiplication des Quotientens in den Divisorem zum Vorscheine gekommen, in dem dividendo nicht anzutreffen sind, kan man dem dividendo das fehlende Gliede andichten, und dieses von jennem abziehen; hernach aber, weil dem dividendo eine Grösse, die sich in demselben nicht befande, beygelegt worden, muß diese dem dividendo wieder weggenohmen werden; deswegen dörfet ihr nur in diesem Falle allezeit die angedichtete Grösse von der, welche vorhanden ist, abziehen, und zu dem Reste das wiedrige Zeichen setzen, nemlich $-$, wenn ihr $+$ habet, und $+$, wenn $-$ ist; so wird die Division richtig seyn. Z. E. Soll $aa - bb$ durch $a + b$ dividiret werden, stehet also:

$aa - bb$	$a + b$ Divisor.
$aa + ab$	$a - b$ Quotient.
* $- ab - bb$	
$- ab - bb$	
* *	

Sprechet: aa durch a dividiret, giebet dem Quotiente a; denn $a \times a = aa$. Wenn dieses geschehen, multipliciret ihr durch diesen Quotiente a den ganzen Divisorem, so kommen diese zwey Producte: $aa + ab$ heraus; schreibet diese unter den dividendum, und ziehet aa von aa ab, so bleibet nichts übrig. Da nun das andere Glied $+ ab$ in dem dividendo nicht angetroffen wird, so bildet euch ein, der dividendus sey $aa + ab - bb$, und ziehet $+ ab$ von $+ ab$; so bleibet von diesem Gliede $+ ab$ nichts übrig. Solchergestalt aber habet ihr dem eividendo $aa - bb$ eine Grösse $+ ab$ angedichtet, welche sich in demselben nicht befande; deswegen müsset ihr

dieselbe ihm wieder wegnehmen. Dieses geschiehet, wenn ihr den Reste $-ab-bb$ anschreibet, und im übrigen die Division vollendet, wie bisher gelehret worden; so giebet der Quotient: $a-b$.

67.) Eine gleiche Beschaffenheit hat es mit der folgenden Aufgabe:

$a^4 - x^4$	$a - x$
$a^4 - x^3 3$	$a^3 + a^2x + ax^2 + x^3$
$* + a^3x - x^4$	
$+ a^3x - a^2x^2$	
$* + a^2x^2 - x^4$	
$+ a^2x^2 - ax^3$	
$* + ax^3 - x^4$	
$+ ax^3 - x^4$	
$* \quad *$	

Sprechet: a stecket in a^4 zu a^3 mahl; schreibet a^3 für den Quotiente an, und multipliciret mit a^3 den ganzen Divisorem $a-b$, so kommen diese zwey Glieder: $a^4 - a^3x$ zum Vorscheine. Da nun das zweyte Glied $-a^3x$ in dem dividendo nicht angetroffen wird, so bildet euch ein, dieselbe sey $a^4 - a^3x - x^4$, und ziehet $a^4 - a^3x$ von dem dividendo $a^4 - a^3x - x^4$ ab, so bleibet nur noch $-x^4$ übrig; weil ihr aber dem dividendo eine Schuld $-a^3x$ [14.] angedichtet, und demselben in der Subtraction zu viel abgezogen habet; so müsset ihr ihm das zu viel abgezogene wieder ersetzen; dieses geschiehet, wenn ihr die Schuld $-a^3x$ in baares Gelt $+a^3x$ [44.] durch Veränderung der Zeichen verkehret, und für den Reste $+a^3x - x^4$ anschreibet. Demnach sprechet ferner: a^3x dividiret durch a giebet dem Quotiente a^2x; multipliciret mit a^2x den Divisorem $a - x$, und subtrahiret die herauskommende Producte $+a^3x - a^2x^2$ von dem Reste des dividendi $+a^3x - x^4$, nach erst gegebener Lehre, so bleibet $+a^2x^2 - x^4$ übrig. Wenn ihr auf gleiche Weise bey den übrigen Producten verfahret, so kommet der gesuchte Quotiente $a^3 + a^2x + ax^2 + x^3$ zum Vorscheine. Das

Das Dritte Capitel

Von den Brůchen

§. I.

Wort-Erklårung.

68.) WEnn wir unserer Einbildungs-Krafft ein ganzes, so in seine Theile getheilet worden, vorstellen, und davon ein gewisse Anzahl gleicher Theilen betrachten, haben wir einen deutlichen Begriff eines Bruches; deswegen kan wohl gesagt werden, ein Bruch sey nichts anders, als ein oder mehrere aliquote Theile eines ganzens.

69.) Die Brůche werden durch zwey Zahlen vorgestellet; die Obere zeiget an, wie viel man Theile von dem ganzen annehme, und hat den Name Zehler, die untere heisset Nenner, und will andeuten, in wie viel gleiche Theile das ganze sey getheilet worden. Der Nenner wird unter den Zehler geschrieben, und beyde durch ein kleines liegendes Strichlein von einander geschieden auf diese

Weise: $\frac{3}{5}$, $\frac{a}{b}$. Die erste wird ausgesprochen: drey Fünfftel; die andere: a dividiret durch b [6.] 3. ist der Zehler; weil derselbe andeutet, wie viel man von einem in 5. Theile getheilten ganzen Theile annehme. 5. ist der Nenner, weil dieser zu erkennen giebet, in wie viel gleiche Theile das ganze sey getheilet worden.

70.) Der Zehler eines Bruches kan gleich, kleiner, und grösser, als der Nenner seyn. Wenn der Zehler dem Nenner gleichet, wird der Bruch gleich einem ganzen, welches man für Eines annimmet; weil ein ganzes allen seinen Theilen zusamen genommen gleich ist. Z. E. $\frac{4}{4} = 1$; und $\frac{a}{a}$ oder $\frac{a}{1} = 1$.

71.) Wenn der Zehler kleiner, als der Nenner ist, so gilt der Bruch weniger als Eines. Gleichwie $\frac{3}{4}$. ist aber derselbe Grösser als sein Nenner, so gilt der Bruch mehr als Eines, wie dieser $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. überhaubts verhält sich ein Bruch gegen der Einheit, wie sich der Zehler zu dem Nenner verhält.

72.) Wir haben gesagt, ein Bruch könne gleich, oder auch Grösser, als Eines seyn, welches von Brüchen eigentlich zu reden, nicht wohl statt findet, und nur de fractionibus spuriis zu verstehen ist; anerwogen ein wahrer Bruch allezeit kleiner als Eines seyn muß; weil er nur aus einigen Aliquoten Theilen eines ganzens entstehet.

73.) Wenn der Zehler kleiner, als der Nenner ist, ob man schon alsdenn einen in den andern nicht dividiren kan, so ist es dennoch eine angezeigte Division; deswegen will der Bruch $\frac{3}{5}$ oder $\frac{a}{b}$ andeuten, daß 3 durch 5 zu dividiren sey, das ist, daß man nur den fünfften Theil von 3. annehmen wolle. Ich sage: den fünfften Theil; weil der Nenner 5 ist; hieraus folget, daß diese beede Ausdruckungen:

druckungen: drey Fünfftel, und der fünffte Theil von Drey: gleiche sind; weil dieser Bruch $\frac{3}{5}$, wenn er auf beede Weisen ausgesprochen wird, einerley begriff in unserer Vernunfft erreget.

§. II.
Die Brüche unter mindere Benennung zu bringen.

74.) Einen Bruch unter mindere Benennung bringen ist nichts anders, als die Ausdruckung verbesseren [15.] das ist, einen Bruch, welcher vorhin in vielen und grossen Zahlen bestunde, jezt durch wenigere, doch also, daß der Werthe desselben unverändert bleibe, vorstellen. Dieses geschiehet auf folgende Weise: suchet einen gemeinen Theiler, welcher so wohl den Zehler als den Nenner ohne Reste dividiret; damit dividiret auch würcklich den Zehler, und den Nenner; wenn nichts überbleibet, habet ihr ein untrügliches Zeichen, daß die Verbesserung statt finde; bleibet aber nur eines übrig, so kan sie nicht angehen. Z. E. Sey $\frac{ad}{bd}$ zu einer minderen Benennung zu bringen; dividiret den Zehler [ad] und den Nenner [bd] mit dem gemeinen Nenner [d], so ist der Quotient $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$.

75.) In den Zahlen hat es ein gleiche Beschaffenheit. Z. E. Sey der Bruch $\frac{72}{96}$ zu verminderen. Machet $72 = ad$, $96 = bd$, und den gemeinen Theiler $24 = d$. und dividiret den Zehler 72 mit 24, hernach den Nenner 96 auch mit 24; so giebet der Quotiente des ersten 3, und des andern 4; setzet 3 und 4 Bruchweis

über

über einander, so ist $\frac{3}{4} = \frac{a}{b} = \frac{72}{96}$. der verminderte Bruch.

76.) Demnach bestehet die ganze Kunst einen Bruch zu vermindern darinnen, daß man den grösten gemeinen Divisorem finde, welcher den Zehler, und den Nenner ohne Reste zu dividiren tüchtig sey. Dieser wird gefunden, wenn man mit dem Zehler in den Nenner, und mit diesem in jennen, oder besser mit desselben Reste in den Zehler dividiret, bis durch solche abwechslende Division alles ohne Reste aufgehet; denn so ist der gemeine Theiler jenne Zahl, welche zulezt dividiret hat. Z. E. Dienet uns der oben gegebene Bruch $\frac{72}{96}$. Dividiret mit dem Zehler [72.] den Nenner [96.] der Quotiente ist 1. und bleiben 24 übrig. Mit diesen dividiret den Zehler 72, so giebet der Quotient [3], und bleibet nichts mehr übrig. Dannenhero habt ihr den gemeinen Divisorem, [24], womit ihr beyde Zahlen 72 und 96 ohne Reste dividiren könnet, richtig gefunden.

§. III.

Verschiedene Brüche unter einerley Benennung zu bringen.

77.) Man sagt, die Brüche stehen unter ungleicher Benennung, wenn ihre Nenner ungleich sind. $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ stehen unter ungleicher Benennung, weilen ihre Nenner b und d verschieden sind. Verschiedene Brüche unter einerley Benennung bringen ist, anstatt einiger Brüche, die verschiedene Nenner haben, andere zu finden, die einerley Nenner führen, und den gegebenen dem Werthe

nach

nach gleich gelten. Wenn ihr z. E. Die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ unter einerley Benennung bringen wollet, müsset ihr den Zehler a mit dem Nenner d, und das c mit b, hernach beyde Nenner durch einander multipliciren, so kommen im Producte beyde Brüche unter einerley Benennung. Stehet also:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

$$\frac{ad}{bd} \quad \frac{bc}{bd}$$

folgends ist $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ und $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$.

78.) Auf gleiche Weise verfahret man auch mit den Zahlen. Z. E. Wenn ihr $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ unter einerley Benennung bringen sollet, so schreibet die Brüche, wie dahier, neben einander:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{8}{12} \quad \frac{9}{12}$$

Und sprechet: 3 mahl 3 ist ist 9 = bc; so giebet das Producte [9] den Zehler [9] des Bruches $\frac{3}{4}$. Multipliciret ferner 4 = d durch 2 = a; so kommet im Producte ad = 8 der Zehler des anderen Bruches $\frac{2}{3}$ heraus; endlich multipliciret beyde Nenner 3 = b, und 4 = d durch einander, so ist das Producte bd = 12 der gemeine Nenner dieser beyden Brüchen. Folgends ist $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ und $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.

79.) Wenn mehrere Brüche unter einerley Benennung zu bringen sind, so wird der Zehler, und Nenner eines jeden Bruches durch das Producte aus den Nenneren der übeigen multipliciret. Z. E. Wenn diese Brüche: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ unter einerley Benennung ge-

bracht werden sollen, so multipliciret man alle Nenner durch einander, sodann die Zehler besonders in alle Nenner; das erste Producte giebet den gemeinen Nenner, und das andere die Zehler. Die Operation stehet solchergestalt:

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5}$$

$$40,\ 45,\ 48.$$

$$60.$$

Folgends ist $\frac{2}{3} = \frac{40}{60}$, $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$ und $\frac{4}{5} = \frac{48}{60}$. nach dieser Lehre verfahret in all anderen Fällen.

§. IV.

Ein Ganzes in ein Bruch zu verwandeln.

80.) Wenn ein ganzes in ein Bruch verwandelt werden soll, so muß aus dem ganzen eine fractio spuria, oder impropria gemacht werden. Dieses geschiehet, wenn das ganze mit dem gegebenen Nenner multipliciret, und der Nenner unter das Producte geschrieben wird. Z. E. Wenn ihr a in ein Bruch verkehren sollet, so schreibet nur $\frac{a}{a}$ oder $\frac{a}{1} = a$.

Wird aber ein anderer Nenner v. g. [b] begehret, so schreibet $\frac{a\,b}{b} = a$.

81.) Ein gleiche Beschaffenheit hat es auch mit den Zahlen. Z. E. Sey 24. in ein Bruch, wessen Nenner [3] verlangt wird, zu verwandeln. Da machet $3 = b$, und $24 = a$. Multipliciret a durch $b = a\,b = 72$, und schreibet b unter a b, so ist $\frac{a\,b}{b} = \frac{72}{3} = 24$.

§. V.

§. V.
Einen Bruch in ein Ganzes zu verwandeln.

82.) Ein Bruch in ein ganzes verwandeln ist den Bruch aufheben, oder suchen, wie viel ganze der Bruch in sich enthält. Dieses zu finden, wird der Zehler mit dem Nenner dividiret; denn so giebet der Quotiente, was man suchet. Z. E. $\frac{ab}{b} = a$. Ingleichen $\frac{abd}{ad} = b$. Hier aber ist wohl zu wissen, daß diese Verwandelung nicht angehe, wenn der Zehler und Nenner keine gleiche Buchstaben führen; deswegen läßt sich dieser Bruch $\frac{ad}{b}$ nicht in ein Ganzes verwandeln.

Eben also kan man auch mit den Zahlen verfahren. Z. E. Wenn ihr $\frac{144}{4}$ in ein Ganzes verwandeln sollet, so machet $144 = ab$, und $4 = b$. dividiret a b mit b, das ist 144 mit 4, und schreibet den gefundenen Quotiente $a = 36$ für das Ganze an, welches ihr gesuchet.

§. VI.
Den Werthe eines Bruches zu finden.

83.) Multipliciret den Werthe des Ganzens mit dem Zehler, und dividiret das Producte, welches herauskommet, mit dem Nenner, so giebet der Quotiente den verlangten Werthe des Bruches. Z. E. Wenn ihr zu wissen verlanget, wie viel $\frac{2}{3}$ fl. Kreutzer in sich enthält, so nehmet ihr den

Werthe eines ganzen Guldens [60 kr.] multipliciret 60 mit dem Zehler [2] und dividiret das Producte [120] durch den Nenner [3]; der Quotient 40 kr. $= \frac{2}{3}$ fl. giebet den gesuchten Werthe. Und solchergestalt könnet ihr in all anderen Fällen verfahren.

§. VII.

Brüche zu addiren.

84.) Wenn die zu addirende Brüche einerley Nenner führen, so werden alle Zehler in eine Summe gebracht, und nur ein Nenner darunter geschrieben; ist alsdann die Summe der Zehleren grösser als der Nenner, so wird der Zehler mit dem Nenner dividiret, und der Quotiente giebet die in dem Bruche verborgene Ganze. [82]

85.) Die Brüche, welche verschiedene Nenner haben, werden nach Lehre des §. III. n. 77. zu einerley Nenneren geführet. Z. E. Wenn diese Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ addiret werden sollen, so müsset ihr sie erst, weil beyde verschiedene Nenner haben, unter eine Benennung bringen [77] da wird $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$, und $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$ demnach addiret $\frac{ad}{bd}$ zu $\frac{bc}{bd}$, so giebet die Summe $\frac{ad + bc}{bd}$

86.) Auf gleiche Weise könnet ihr auch mit den Zahlen verfahren. Z. E. Ein Kaufman verkauffet an einem Tage verschiedene Sorten Tuches. Erstlich: $15\frac{5}{6}$ Ehlen Teutsches. $18\frac{3}{4}$ Ehlen Französisches. $12\frac{2}{3}$ Ehlen Engelländisches, und $20\frac{4}{5}$ Ehlen Holländisches. Er will wissen, wie viel Ehlen Tuches zusamen genommen

verkaufft

verkaufft worden seyen? dieses zu beantworten reduciret die Brüche unter einerley Nenner [n.79] so wird $\frac{5}{6}=\frac{300}{360}$, $\frac{3}{4}=\frac{270}{360}$, $\frac{2}{3}=\frac{240}{360}$ und $\frac{4}{5}=\frac{288}{360}$. addiret diese Brüche zusamen, und dividiret die Summe $\frac{1098}{360}$ durch den Nenner [n.83] so findet ihr in dem Quotiente 3 Ganze, welche zu der Haubt-Summe gehören, nebst einem Reste 18, welcher Bruchweis über den gemeinen Nenner zu schreiben, oder nach verbesserter Ausdruckung [75] also zu setzen $\frac{18}{360}=\frac{1}{20}$. folgends ist die verlangte Sume der Ehlen des Verkauffen Tuches 68 $\frac{1}{20}$ Ehlen.

§. VIII.

Ein Bruch von dem Anderen zu subtrahiren.

87.) In den Brüchen, welche einerley Nenner führen, wird der Zehler des einen von dem Zehler des anderen abgezogen, der Nenner aber unverändert gelassen, und das übergebliebene für den gesuchten Reste angeschrieben. Wenn der Zehler des Bruches, von welchem die Subtraction geschehen sollte, kleiner ist, als der andere, dergestalt, daß man den Grösseren von dem Kleineren abziehen müßte, kan von der Haubt-Sume Eines entlehnet, nach Lehre [§. IV. n. 81.] in ein Bruch gleicher Benennung verwandelt [81] und zu dem kleineren Zehler addiret werden [84] so wird die Subtraction sich leicht verrichten lassen. Haben aber die Brüche verschiedene Nenner, so führet sie unter einerley [78] und verrichtet die Subtraction, wie gelehrt worden.

Z. E. Wenn ihr $\frac{c}{d}$ von $\frac{a}{b}$ subtrahiren sollet, so führet beyd Brüche unter eine Benennung; diese werden erscheinen, wie dahier: $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$, und $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$. Demnach ziehet den Zehler bc von dem Zehler ad, und schreibet $\frac{ad-bc}{bd}$.

88.) Mit

88.) Mit den Zahlen hat es ein gleiche Beschaffenheit. Z. E. Ein Schneider empfängt für zwey Kleider $36\frac{5}{8}$ Ehlen Tuches; zu dem einen Kleide brauchet er $17\frac{3}{4}$ Ehlen; man verlangt zu wissen, wie viel Ehlen demselben zu den anderen Kleide übrig bleiben? diese Aufgabe zu beantworten, werden die Brüche $\frac{5}{8}$ und $\frac{3}{4}$ unter einerley Benennung gebracht, da wird $\frac{5}{8} = \frac{20}{32}$ und $\frac{3}{4} = \frac{24}{32}$. Nun weil ihr 24 von 20 nicht nehmen könnet, so entlehnet von den 36 oder 19. Ehlen des ersten Kleides ein ganze Ehl [87] und verwandelt sie in ein Bruch [81] wessen Nenner 32 ist, so wird $1 = \frac{32}{32}$. demnach addiret $\frac{32}{32}$ zu $\frac{20}{32}$, und subtrahiret $\frac{24}{32}$ von der Summe $\frac{52}{32}$, so bleiben $\frac{28}{32}$, und nach verbesserter Ausdruckung [75] $\frac{7}{8}$ übrig. Nach verfertigter Subtraetion bleiben für das andere Kleide $18\frac{7}{8}$ Ehlen.

§. IX.

Ein Bruch durch ein andern zu multipliciren.

89.) WEnn man einen Bruch durch ein anderen multipliciren soll, so soll man ein Stücke von ihm geben. Z. E. $\frac{2}{3}$ durch $\frac{1}{2}$ multipliciren heisset $\frac{2}{3}$ ein halb mahl nehmen, oder einem $\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{3}$ geben, und $\frac{4}{5}$ durch $\frac{3}{7}$ multipliciren ist eben so viel als $\frac{4}{5}$ in 7 Theile eintheilen, und 3 solcher Theile davon nehmen, das ist, $\frac{4}{5}$ durch 7 dividiren, und dem Quotienten durch 3 multipliciren. Weil nun der Nenner der blosse Name ist §. I. n. 69. so muß eigentlich der Zehler des zu multiplicirenden Bruches durch den Nenner des anderen dividiret werden, nemlich der Zehler 4 des Bruches $\frac{4}{5}$ durch den Nenner 7 des Bruches $\frac{3}{7}$. Damit er sich nun dividiren lässet, muß der zu multiplicirende Bruch in ein andern verwandelt werden; dieses geschiehet, wenn man ihn durch den Nenner des Multiplicanten 7 multipliciret; denn solchergestalt kommen $\frac{28}{35}$ anstatt $\frac{4}{5}$ heraus. Davon ist der siebente Theil

$\frac{4}{35}$. Jezt könnet ihr diesen Bruch 3 mahl nehmen, so bekommet ihr $\frac{12}{35}$. Da es aber ein vergebliche Arbeit wäre, wenn man den Zehler 4 erst durch den Nenner 7 multipliciren, und hernach das Producte wieder dividiren wollte; so wird blos der Nenner 5 durch 7, und sogleich der Zehler 4 durch 2 multiplicieret.

90.) Bey der Multiplication der Brüchen können drey Fälle zum Vorscheine kommen. I.) Kan es sich ereignen, daß ihr Brüche Durch Brüche II.) oder Brüche durch Ganze, und III.) Ganze mit Brüchen durch Brüche zu multiplicieren habet. In dem ersten Falle werden die Nenner, und die Zehler durch einander multiplicieret; die beyde Producte geben das verlangte facit. Z. E. Sey $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ zu multiplicieren; da giebet das Producte $\frac{ac}{bd}$. In dem anderen Falle setzet unter das Ganze eine Unität in den Zifferen, in den Buchstaben aber multipliciret den Zehler des Bruches durch das Ganze, und verfahret nach der erst gegebenen Regel, so kommet heraus, was ihr gesuchet. Z. E. Sey $\frac{a}{b}$ durch c zu multiplicieren, so ist das Producte $\frac{ac}{b}$. In dem dritten Falle wird das Ganze zu dem Bruch reduciret, welcher ihm anhanget, damit nur ein Bruch daraus werde, und verfahren, wie erst gedacht worden. Z. E. Sey in dem ersten Falle $\frac{4}{5}$ durch $\frac{2}{3}$ zu multipliciren, da ist $4 \times 2 = 8$, und $5 \times 3 = 15$; folgends das ganze Producte $\frac{8}{15}$. In dem anderen Falle sey 8 durch $\frac{4}{5}$ zu multipliciren, da kommet $\frac{8}{1} \times \frac{4}{5} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$ heraus. In dem dritten Falle sey 8 durch $3\frac{5}{6}$ zu multipliciren, da ist das ganze 3 durch 6 zu multipliciren, und zu dem Producte 18 der Zehler 5 zu addiren, so giebet die Summe $\frac{23}{6}$ den reducirten Bruch; setzet demnach unter 8 eine Unität $\frac{8}{1}$, so giebet das Producte, wenn ihr richtig verfahret, $30\frac{4}{6}$. wie dahier $8 \times 3\frac{5}{6} = \frac{8}{1} \times \frac{23}{6} = \frac{184}{6}$. $3\frac{5}{6} = \frac{23}{6} \times 8 = \frac{184}{6} = 30\frac{4}{6}$.

91.) Wenn

91.) Wenn ihr auf gleiche Weise mit allen anderen Brüchen verfahret, so könnet ihr allezeit das verlangte Producte finden. Wobey zu beobachten, daß das Producte immerhin geringer werde; welches man in Erwegung, daß die Multiplication den Werthe des zu multiplicirenden Bruches hätte vermehren sollen, für fremd ansehen könnte; allein wenn ihr bedenket, daß man in den Brüchen nicht multipliciren könne, ohne zugleich das Multiplicirte wieder zu dividiren, wird es euch nicht mehr wunderlich scheinen, daß in der Multiplication immer weniger herauskommet, als ein jeder von den Brüchen, die durcheinander multipliciret worden; indem es in der That eine Division ist, und zwar durch einen viel grösseren Divisorem, als der Multiplicante war. In dem vorgehenden Exempel ist der Multiplicante 3, und der Theiler 5 gewesen, weil also dieser Grösser, als jenner ist, hat der Bruch um so viel verminderet werden müssen, als 3 geringer ist denn 5, nemlich um zwey Einheiten. W. Z. E.

§. X.

Einen Bruch durch einen anderen zu dividiren.

92.) Wenn der Bruch, welchen ihr dividiren sollet, und der Divisor gleiche Nenner haben, so dividiret ihr den Zehler des einen durch den Zehler des anderen Bruches, der Quotiente giebet, was ihr suchet. Stehen aber beyde Brüche unter verschiedener Benennung, so müsset ihr sie erst zu einerley bringen [77]. Z. E. Sollet ihr $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren, weil diese Brüche verschiedene Nenner führen, bringet ihr sie zu einerley [77.] da wird $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ und $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$. Demnach wird ad

durch

durch bc, das ist, beyde Zehler durch einander dividiret, und der Quotiente giebet $\frac{ad}{bc}$, was man gesuchet.

93.) Wenn ein Bruch in Zahlen durch ein anderer dividiret wird, so fraget man, wie viel mahl der eine in dem anderen enthalten sey. Werden nun die Brüche zu gleichen Nenneren gebracht, so muß einer so viel mahl in dem anderen enthalten seyn, als der Zehler des einen in dem Zehler des anderen; weil in dieser Vergleichung der gemeine Nenner als der gemeine Nahme derer Dinge, die gezehlet werden, nicht anzusehen. Allein, indem zwey Brüche zu einer Benennung gebracht werden, erwächst der Zehler des ersten, wenn man seinen Zehler durch den Nenner des anderen multipliciret; hingegen der Zehler des anderen, wenn man seinen Zehler durch den Nenner des ersten multipliciret; dannenhero kommen die beyden Zahlen, so durch einander dividiret werden sollen, heraus, wenn der Divisor umgekehret, und ein Bruch in den anderen multipliciret wird. Z. E. Sey $\frac{4}{5}$ durch $\frac{2}{3}$ zu dividiren. Kehret den Divisorem $\frac{2}{3}$ um, und schreibet $\frac{3}{2}$; demnach multipliciret die Zehler [3 und 4], und die Nenner [2 und 5] durch einander, so kommet der Quotient $\frac{12}{10} = 1\,\frac{2}{10} = 1\,\frac{1}{5}$ heraus. Ein gleiche Beschaffenheit hat es, wenn ihr Z. E. $\frac{3}{4}$ durch $\frac{2}{3}$ dividiret; oder ihr könnet auch noch folgender Maassen den Quotiente finden; ihr führet nemlich beyde Brüche unter einerley Benennung [78] da kommet $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ und $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ heraus, und dividiret 9 durch 8, so giebet der Quotiente auch $1\,\frac{1}{8}$. wie vorhin.

94.) Wenn Ganze durch Brüche dividiret werden sollen, so muß das Ganze durch des Bruches Nenner multipliciret, und das Producte, welches herauskommet, durch den Zehler dividiret werden. Z. E. Sey c durch $\frac{a}{b}$ zu dividiren. Multipliciret c mit dem Nenner b, und dividiret das Producte bc mit dem Zehler a, so giebet der Quotiente $\frac{bc}{a}$, was man gesuchet. Eben also ist, wenn

a durch $\frac{c}{d}$ dividiret wird, der Quotiente $\frac{ad}{c}$.

95.) In den Zahlen wird ein gleiches beobachtet. Z. E. Wenn ihr 15 durch $\frac{2}{3}$ dividiren sollet, so müsset ihr erst 15 durch 3 multipliciren, und hernach das Producte 45 mit 2 dividiren, so kommet $22\frac{1}{2}$. heraus.

§. XI.

Von den Brüchen der Brüchen.

96.) Die Brüche der Brüchen sind Theile der Brüchen, gleichwie die Brüchen Theile von den Ganzen sind. Z. E. Wollen wir setzen, es habe einer $\frac{2}{3}$ von einer Ehle Holländisches Tuches, und soll davon $\frac{3}{4}$ abschneiden; so sind ja diese $\frac{3}{4}$ ein Bruch eines Bruches, weil sie nicht $\frac{3}{4}$ einer ganzen Ehle, sonderen nur $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$ sind. Damit ihr auch diese Art der Brüchen zu berechnen wissen möget, so ist wohl zu merken, daß dieses nicht wohl geschehen könne, ehe ihr dieselbe zu Brüchen ihrer Ganzen reduciret könnet; dieses aber geschiehet, wenn ihr derselben Zehler durch den Zehler des Bruches, wessen sie Brüche sind, und ihre Nenner durch die Nenner des anderen Bruches multipliciret. Z. E. Dienet uns der obige Bruch $\frac{2}{3}$ des Bruches $\frac{3}{4}$. Wenn ihr nemlich $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ reduciren sollet, so multiplicieret die Zehler [2 und 3.] hernach die Nenner [3 und 4] durch einander, und schreibet für den reducirten Bruch $\frac{6}{12}$ an; den Beweiß davon werdet ihr leicht begreiffen, wenn ihr nur bedenket, daß, weil das Ganze 4. Viertheile, und ein jedes Viertheile 3. Drittheile enthält, dasselbe folgsam 3 mahl 4, oder 12. Drittheile von den 4. Viertheilen in sich begreiffen müsse. Ingleichen, weil ihr $\frac{3}{4}$ habet, und von einem jeden Viertheile $\frac{2}{3}$tel nehmen sollet, habet ihr ja 3 mahl $\frac{2}{3}$ von Viertheilen, das ist, $\frac{6}{3}$ von Viertheilen, welche 6. Drittheile ihr mit dem Ganzen

vergleichet,

vergleichet, wie erst geschehen, so findet ihr, daß dieselbe $\frac{6}{12}$ von dem Ganzen betrageu. Nachdem ihr dieses, was wir von der Reduction der Brüchen gelehret, wohl verstanden habet, könnet ihr zu den zwey folgenden Aufgaben fortschreitteu; in diesen werdet ihr noch besser erlernen, wie man sich bey den Brüchen von dieser Art zu verhalten habe.

§. XII.

Die I. Ausgabe

97.) Ein Käuffer hat 3 $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$ Ehlen Holländisches Tuches, von welchem er schon vorher 6 $\frac{5}{6}$ und $\frac{7}{8}$ von $\frac{5}{6}$ Ehlen hatte, eingekauffet; man fragt, wie viel Ehlen Tuches der Käuffer in allem habe?

Diese Frage zu beantworten, müsset ihr erst den Bruch des Bruches $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$ zu einem Bruch seines Ganzen reduciren §. XI. n. 96. dieser giebet $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$; hernach, damit ihr $\frac{1}{2}$ zu $\frac{2}{3}$ addiren möget, beyde Brüche zu einerley Nenneren bringen [§. III. n. 78.] so wird $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ und $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. addiret beyde zusamen [§. VII. n. 86.] da giebet ihr Summe $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$ Ehle folgends hat der Käuffer an einem Orte 3 und 1 $\frac{1}{6}$ Ehlen, das ist, 4 $\frac{1}{6}$ Ehlen.

$$\frac{3}{4} \text{ von } \frac{2}{3} \quad \frac{6}{12} \qquad \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \qquad \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \qquad \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6} = 1\tfrac{1}{6} \text{ Ehle.}$$

$$\frac{7}{8} \text{ von } \frac{5}{6} \quad \frac{35}{48} \qquad \frac{5}{6} = \frac{40}{48} + \frac{35}{48} = \frac{75}{48} = 1\tfrac{27}{48} \text{ Ehle.}$$

4 $\frac{1}{6}$	oder	$\frac{8}{48}$
7	- -	$\frac{27}{48}$
11.		$\frac{35}{48}$.

Ein gleiche Beschaffenheit hat es auch mit den Brüchen $\frac{7}{8}$ von $\frac{5}{6}$; nach geschehener Reduction wird derselbe $= \frac{35}{48}$; damit ihr nun diesen zu $\frac{5}{6}$ addiren möget, muß $\frac{5}{6}$ in ein anderen Bruch, wessen Nenner 48 ist, verwandelt werden; dieses geschiehet; wenn ihr den Zehler und den Nenner durch 8 multipliciret; da wird $\frac{5}{6} = \frac{40}{48}$. Demnach addiret $\frac{40}{48}$ zu $\frac{35}{48}$, so giebet die Summe $\frac{75}{48} = 1\frac{27}{48}$. Folgends hat der Käuffer $6 + 1 + \frac{27}{48}$. Ehlen $= 7\frac{27}{48}$. Ehlen. Damit ihr nun den Bruch $\frac{1}{6}$ zu $\frac{27}{48}$ addiren könnet, müsset ihr $\frac{1}{6}$ mit 8 multipliciren, und in ein anderen Bruch, wessen Nenner 48 ist, verwandeln [§. VII. n. 85.] da wird $\frac{1}{6} = \frac{8}{48}$. Nach geschehener Addition erhellet, daß der Käuffer an einem Orte $4\frac{8}{48}$, und an dem anderen $7\frac{27}{48}$, zusamen also $11\frac{35}{48}$. Ehlen habe. Welches auch die Aufgabe auflöset.

§. XIII.

Die II. Ausgabe.

98.) Man verlanget zu wissen, was von einem Stücke Tuches, welches 36. Ehlen, $\frac{4}{5}$ und $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$ lange ist, überbleibet, wenn man $25\frac{6}{7}$ Ehlen, und $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$ davon abschneidet.

Machet aus dem Bruche $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$ ein Bruch seines Ganzens $= \frac{8}{15}$, und, damit ihr $\frac{4}{5}$ zu $\frac{8}{15}$ addiren könnet, verwandelt $\frac{4}{5}$ in einen anderen, wessen Nenner 15 ist; dieses geschiehet, wenn ihr seinen Zehler und Nenner durch 3 multipliciret; denn solchergestalt kommet anstatt $\frac{4}{5}$ der Bruch $\frac{12}{15}$. heraus. Demnach addiret $\frac{12}{15}$ zu $\frac{8}{15}$, die Summe giebet $\frac{20}{15} = 1\frac{5}{15} = 1\frac{1}{3}$ Ehle. Folgends hat dieses Stücke Tuches $36 + 1 + \frac{1}{3} = 37\frac{1}{3}$ Ehlen.

$$\frac{2}{3} \text{ von } \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \qquad \frac{4}{5} \text{ oder } \frac{12}{15} + \frac{8}{15} = \frac{20}{15} = 1\frac{5}{15} = 1\frac{1}{3}.$$

$$\begin{array}{lcc} 6 & 42 & 72 \\ \frac{3}{4} \text{ von } \frac{2}{3} & \frac{6}{12} & \frac{6}{7} \\ 12 & \multicolumn{2}{c}{84} \end{array}$$

$$\frac{42}{84} + \frac{72}{84} = \frac{114}{84} = 1\frac{30}{84} \text{ Ehlen.}$$

$$\begin{array}{cc} 84 & 90 \\ \frac{1}{3} & \frac{30}{84} \\ \multicolumn{2}{c}{252} \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} 37 \text{ - - - } & \frac{84}{252} \\ 26 & \frac{90}{252} \\ \hline 10 & \frac{246}{252} \end{array}$$

Auf eben diese Weise wird auch der Bruch $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$ zu einem Bruch seines Ganzens reduciret, welcher, wie aus der vorhergehenden Operation erhellet, $\frac{6}{12}$ des Ganzens ausmacht; damit ihr aber $\frac{6}{7}$ zu $\frac{6}{12}$ addiret könnet, müsset ihr erst beyde Brüche zu einerley Nenneren führen, so wird $\frac{42}{84}$ und $\frac{72}{84}$ herauskommen, nach geschehener Addition ist die Summe $\frac{114}{84} = 1\frac{30}{84}$ Ehlen. Deswegen müssen von dem gegebenen stücke Tuches $25 + 1 + \frac{30}{84} = 26 + \frac{30}{84}$ Ehlen abgeschnitten werden. Führet die Brüche $\frac{30}{84}$ und $\frac{1}{3}$ zu einerley Nenneren, so giebet da $\frac{90}{252}$, und dort $\frac{84}{252}$ den Innhalt $37 + \frac{84}{252}$ des ganzen Stückes. Da ihr nun $26 + \frac{90}{252}$ von $\frac{84}{252}$, weil dieser zu kleine ist, nicht abziehen könnet, so müsset ihr 1. Ehle von 37 entlehnen [§ VIII. n. 88.] und in ein Bruch, wessen Nenner 252 ist, verwandeln; dieses geschiehet, wenn ihr für den Zehler und Nenner 252 annehmet; denn so wird $\frac{252}{252} = 1$ [§. I. n. 70.] addiret $\frac{252}{252}$ zu $\frac{84}{252}$, und ziehet $\frac{90}{252}$ von der Summe $\frac{336}{252}$ ab, so bleiben $\frac{246}{252}$ übrig. Wenn ihr jezt so fortfahret, werdet ihr für den gesuchten Reste $10 + \frac{246}{252} = \frac{41}{42}$ Ehlen finden. Da es nun mit allen Brüchen einerley Beschaffenheit hat, so könnet ihr euch in allen vorkommenden Fällen, wenn ihr diese Lehre wohl inne habet, helfen, und das verlangte facit finden.

Das Vierte Capitel

Von Erhebung der Grössen zu ihren Dignitäten.

§. I.

Von Erhebung der Grössen zu ihren Dignitäten, und ihrem Calculo.

99.) Wir nennen Dignitäten, oder Potenzen einer Grösse die verschiedene Grade, durch welche sie sich ihrem Werthe nach erhebet, da sie in sich selbst öfters nach einander multipliciret wird. Die erste Dignität wird die Stam̃-Grösse selbst genennet, weil sie, so zu reden, den ersten Schritt, dadurch sie sich von nichts entfernet, und der Einheit zu näheret, selbst machet.

Wenn man setzet, solche Grösse heisse a, und a durch a, das ist, die Grösse durch sich selbst multipliciret, so heisset das Product aa, welches herauskommet, die andere Potenz, Dignität, oder Quadrat derselben Grösse. Multipliciret ihr die andere Digintät aa noch

noch einmahl durch die erste a, so kommet die dritte Potenz, Dignität, oder cubus aaa heraus. u. s. w. dergestalt daß aaaa die vierte Potenz, Dignität, oder Biquadrate, aaaaa die fünffte, aaaaaa die sechste ꝛc. ꝛc. Potenz, oder Dignität genennet wird; welches man auch also unendlich fortsetzen kan.

100.) Die Ausdruckung zu verbessern, und die Potenzen den Augen deutlicher vorzustellen, wird der Buchstab der erhobenen Dignität nur einmal geschrieben [§. IV. n. 16.] und der Grad derselben durch eine kleine Ziffer, oder, wenn er nicht determiniret ist, durch einen kleinen Buchstabe, den ihr oben, wie die Ziffer der Exponenten zur Rechten anhänget, angedeutet. Z. E. Ihr schreibet anstatt aa, aaa, aaaa, aaaaa ꝛc. nur a^2, a^3, a^4, a^5 ꝛc. Auf gleiche Weise wird auch x^m, a^m, b^n ꝛc. geschrieben. Diese Zahlen werden die Exponenten der Dignitäten genennet; weil sie den Werthe der Buchstaben, bey welchen sie stehen, erklären.

101.) Nun in Ansehung, daß die Dignitäten, eine gegen der anderrn betrachtet, sich nur um ein Buchstabe vermehren, sind auch ihre Exponenten nur um Eins von einander entfernet, dergestalt, daß ihr Reihe ein Reihe der natürlichen Zahlen 1. 2. 3. 4. 5. ꝛc. vorstellet; dannenhero sind die Dignitäten der Grösse a, bey der ersten, welche a^1 ist, anzufangen, ein Reihe a^1, a^2, a^3, a^4, a^5 ꝛc. die man unendlich so fortsetzen kan; die unendliche Dignität von a wird also a^n bemerket. Was wir dahier von der Dignität der Grösse a lehren, will sich zugleich auf alle andere Grössen b, c, d ꝛc. erstrecken.

102.) Wenn ihr eine Dignität von a durch ein andere von eben dieser Wurzel a multipliciren sollet, dörfet ihr nur den Exponente der zu multiplicirenden Grösse zu dem Exponente des Multiplicanten addiren, so ist die Summe, welche herauskommet, der Exponente des gesuchten Productes. Z. E. Sollet ihr a^3 durch a^5 multipliciren. Addiret 3 und 5 zusamen, so ist die Summe 8 der Exponente des neuen Productes a^8; denn, weil a^3 eben so viel gilt, als aaa [§. IV. n. 16.] und a^5, als aaaaa, muß auch das Producte,

ducte, welches von a^3 durch a^5 herauskommet, das nemliche seyn, welches von aaa durch aaaaa zum Vorscheine gekommen wäre; anerwogen nach den Regeln der Multiplication die Grössen nur in einer Reihe nach einander angeschrieben werden; deswegen ist auch a^8 eben so viel als aaaaaaaa. Ein gleiche Beschaffenheit hat es auch mit den Grössen, deren Exponente undeterminiret sind. Z. E. Wenn ihr x^m durch x^n multipliciren sollet, so addiret ihre Exponenten m und n zusamen, die Summe giebet x^{m+n}. wie aus den folgenden Exempeln erhellet:

$$\begin{array}{ccc} Y^n & Z^r & A^m \\ Y^n & Z^m & A^n \\ \hline Y^{2n} & Z^{r+m} & A^{m+n}. \end{array}$$

103.) Hingegen, wenn man eine Dignität von a mit einer anderer von eben dieser Wurzel a dividiren soll, wird der Exponente des Divisoris, von dem Exponente des Dividendi subtrahiret; denn so ist das übergebliebene der Exponente des gesuchten Quotienten Z. E. Sey a^5 durch a^2 zu dividiren; da ziehet 2 von 5; der Reste 3 ist der Exponente des Quotienten a^3; denn, weil der Dividendus $a^5 = aaaaa$, der Divisor aber $a^2 = aa$ ist, und dieser von jennem abgezogen werden solle, wird es klar, daß nach abgezogenen aa von aaaaa der Quotiente $aaa = a^3$ [§. IV. n. 16.] seyn müsse. Jngleichen, wenn ihr a^1 durch a^1 dividiret, wird der Exponente 1. von dem Exponente 1. abgezogen; da ist der Rest $1 - 1 = 0$. folgends der Quotient a^0. Nun ist a^0. eben so viel, als 1; denn $\frac{a}{a} = 1$. [§. VII. n. 60.]; weil a sich selbst einmahl enthält. Diese Ausdruckung ist allerdings wohl in Acht zu nehmen.

104.) Hieraus fliesset, daß, wenn man a^0 durch a^1 dividiret, der Exponente − 1, folglich der Quotiente a^{-1} seyn müsse; denn 1 von ∅ abgezogen lässet im Reste − 1. [§. III. n. 36.] dividiret

ihr

ihr aber noch ferner a^{-1} durch a^{1}; so ist der Exponente -2, folgends der Quotient a^{-2}; denn $+1$ von -1 lässet -2. [§. III. n. 33.] dividiret ihr abermahl a^{-2} durch a^{1}, so ist der Quotient $a - 3$. u. s. w. dergestalt, daß, wenn ihr auf solche Weise fortfahret, ihr ein neue Reihe der Dignitäten findet, deren Exponenten eine Seriem negativam der natürlichen Zahlen vorstellen, welche a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5} 2c. u. s. w. unendlich also fortgehen würden; allwo die unendliche Potenz $a^{-\infty}$ wäre.

105.) Diese Ausdruckung lässet sich auch noch anders vorstellen; denn in Erwegung, daß $a^{0} = 1$ ist [103.] kan in die Stelle a^{0} nur 1. gesetzet werden; da ist aber, wenn hernach 1 durch a^{1} dividiret wird, der Quotiente $a\frac{1}{2} = a^{-1}$. Ingleichen, wenn ihr nochmahl $a\frac{1}{2}$ durch a^{1} dividiret, wird der Ouotiente $a\frac{1}{1} = a^{-2}$. Dividiret ihr weiters $a\frac{1}{2}$ durch a^{1}, so ist der Quotient $a\frac{1}{3} = a^{-3}$. u. s. w. unendlich, dergestalt, daß die beyde Reihen:

$$a^{-1}\ ,\quad a^{-2}\ ,\quad a^{-3}\ ,\quad a^{-4}\ \text{2c. und}$$

$$a\tfrac{1}{2}\ ,\quad a\tfrac{1}{2}\ ,\quad a\tfrac{1}{3}\ ,\quad a\tfrac{1}{4}\ \text{2c. einander}$$

gleiche sind. W. Z. E.

106.) Man fraget villeichte, zu was Ende diese Ausdruckungen dienlich seyn können? deswegen sollen wir dahier zeigen, wie dieselbe in verschiedenen Fällen mit grossem Vortheile angebracht werden können, und zwar erstlich sey $a = 4$; so ist $a\frac{1}{1} = \frac{1}{4}$, $a\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$, $a\frac{1}{3} = \frac{1}{64}$ 2c. folgends ist ein jede Reihe der vorhergehenden Ausdruckungen eine absteigende Reihe der Brüchen, deren Nenner die Dignitäten von 4 sind. Allhier ist zu merken, daß, wenn ihr diese Reihe zu der Reihe der Dignitzten setzet, ihr ein unendliche Reihe der Dignitäten von 4 sowohl im auf- als absteigen erlanget. Diese Reihe sind: $a^{-\infty}$ 2c. a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^{0}, a^{1}, a^{2}, a^{3}, a^{4}, 2c. a^{∞} 2c. und $\frac{1}{256}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{4}$, 1, 4, 16, 64, 256 2c. Dabey ist zu beobachten, daß der Werthe von a^{0}, a^{1}, a^{2} 2c. sich im Aufsteigen bis auf a^{∞} erstrecke, wessen Werthe unendlich ist. Hingegen a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, sich im Absteigen dergestalt vermindere, daß sein Werthe

unendlich kleine werde, folgends $a^{-\infty}$ einen unendlich kleinen Werthe andeute; weil 1. durch ein unendliche Grösse zu dividiren wäre.

107.) Endlich, wenn man eine Dignität einer Grösse zu einer anderen erheben soll, wird ihr Exponente durch den Exponente der verlangten multiplicirt, und das Producte giebet den Exponente der gesuchten Dignität. Die Ursach dessen ist leicht zu errathen; denn ihr sollet den Exponente der gegebenen Dignität so vielmahl zu sich selbst addiren, als der Exponente der begehrten viele Einheiten in sich enthält; dieses aber geschiehet, wenn ihr einen Exponenten durch den anderen multipliciret: folgends rc. Ihr sollet z. E. x^3 zu der vierten Dignität erheben: multipliciret 3 durch 4, das ist, den Exponente 3 der gegebenen Dignität x^3 durch den Exponente 4 der begehrten, und nehmet x^{12} für die gesuchte Dignität an: oder überhaubt ist die Dignität n von $y^m = y^{mn}$.

Beweiß.

Wenn ihr x^3 zur vierten Dignität erhebet, so müsset ihr $x^3 = xxx$ dreymahl in sich selbst multipliciren; durch die erste Multiplication wird die Wurzel xxx zum Quadrate, durch die andere zur dritten, und durch die dritte zur vierten Dignität erhoben. Derowegen, wenn ihr xxx durch xxx multipliciret, ist das Producte xxxxxx das Quadrate; multipliciret ihr ferner xxxxxx durch xxx, so kommet im Producte xxxxxxxxx der Cubus heraus. Multipliciret ihr endlich den Cubum xxxxxxxxx durch xxx, so giebet das Producte xxxxxxxxxxxx die verlangte vierte Dignität. Nun aber ist xxxxxxxxxxxx eben so viel als x^{12} [§.IV. n.16.] dahero ist erwiesen, daß x^{12} die vierte Dignität von x^3 sey.

108.) Eine Wurzel aus einer gegebenen Potenz ausziehen, heißt diejenige Grösse finden, die durch sich selbst multipliciret die gegebene Potenz hervorbringet; als die Quadrat-Wurzel aus 4. ausziehen heisset die Zahl finden, die durch sich selbst multipliciret 4 bringet.

109.) Hieraus fliesset, daß, wenn man aus einer gegebenen Dignität eine verlangte Wurzel ziehen soll, man nur ihren Exponente durch den Exponente der gegebenen Dignitäts-Wurzel dividiren, oder nach Lehre des [n. 107.] von dem Exponente der gegebenen Dignität $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ꝛc. abziehen dörffe, so kommet die gesuchte Wurzel heraus. Z. E. Wenn ihr die dritte Wurzel von x^{12} ausziehen sollet, nehmet ihr $\frac{1}{3}$ von 12, das ist 4, und schreibet a^4 für die gesuchte Wurzel an. Diese Lehre ist ein nothwendige Folge aus dem vorhergehenden; denn, wenn ihr um x^4 zur dritten Dignität zu erheben, dessen Exponente durch den Exponente 3 der dritten Dignität multipliciret [n. 107.] folget unwiedersprechlich, daß, wenn ihr wieder die dritte Wurzel ausziehen wollet, ihr $\frac{1}{3}$ von 12 nehmen müsset.

110.) Ein gleiche Beschaffenheit hat es, wenn man die Quadrat-Cubic- oder andere Wurzel nach Belieben von a^1 ausziehen soll, denn da dörffet ihr nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ꝛc. von 1. nehmen. So ist Z. E. von a^1 die Quadrat-Wurzel $a^{\frac{1}{2}}$, die Cubic-Wurzel $a^{\frac{1}{3}}$, die Wurzel der vierten Dignität $a^{\frac{1}{4}}$ ꝛc. u. s. w.

111.) Eben also, wenn ihr von $a^{\frac{1}{2}}$ die Wurzel der dritten Dignität ausziehen sollet, müsset ihr ein $\frac{1}{3}$ von $a^{\frac{1}{2}}$ nehmen; dieses geschiehet, wenn ihr erst $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ zu einerley Nenneren führet [§ III. n. 78.] da ist $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ und $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, hernach $\frac{2}{6}$ von $\frac{3}{6}$ subtrahiret, so bleibet $\frac{1}{6}$ für die ausgezogene Wurzel $a^{\frac{1}{6}}$ übrig. Ingleichen, wenn die Wurzel der 6ten Dignität von $a^{\frac{1}{5}}$ begehrt wird, müsset ihr erst $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$ zu einer Benennung bringen, da ist $\frac{1}{5} = \frac{6}{30}$ und $\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$. subtrahiret diesen von jennem, so giebet der Rest $\frac{1}{30}$ die gesuchte Wurzel $a^{\frac{1}{30}}$.

§. II.

Die Natur des Quadrates, oder der anderen Dignität einer Binomischen Wurzel zu finden.

112.) WEnn die Wurzel einer Dignität oder Potenz aus zwey Theilen bestehet, nennet man sie eine binomische Wurzel, wie a ✠ b. bestehet sie aus drey Theilen, als a ✠ b ✠ c; so heisset sie eine trinomische Wurzel: wenn sie aus vier Theilen bestehet, eine quadrinomische Wurzel u. s. w. überhaubt aber nennet man sie polynomische Wurzel, wenn sie aus mehr als zwey Theilen bestehet.

113.) Wenn ihr die Natur des Quadrates, oder der anderen Dignität einer binomischen Wurzel zu untersuchen beliebet, so wollet ihr finden, wie das Quadrat derselben entstehen kan; denn um des Willen stellet ihr euere Observation an; multipliciret demnach die Binomische Wurzel a ✠ b durch sich selbst, so wird das Product zeigen, aus was für Theilen das Quadrat zusamen gesetzet wird, und wie diese Theile des Quadrates aus den Theilen der Wurzel entstehen:

$$\begin{array}{llll} a & + b & & \\ a & + b & & \\ \hline aa & + ab & & \\ & + ab & + bb & \\ \hline aa & + 2ab & + bb & \end{array}$$

aa ✠ 2ab ✠ bb quadrat der binomischen Wurzel.

114.) Das quadrat der binomischen Wurzel begreifet in sich die quadrate der beyden Theile [a^2 und b^2] und ein Product [2ab] aus dem einen Theile zweymahl genommen [2a] in den anderen [b]

115.)

115.) Setzet $a = a + b$, und $b = c$, so kommet für das quadrat der trinomischen Wurzel $[a + b]^2 + 2[a + b]c + c^2$. oder $aa + 2ab + 2ac + bb + 2bc + cc$. Und also müsset ihr zu dem binomischen quadrate noch das Product aus der Summe der beyden Theile der binomischen Wurzel zweymahl genommen in den dritten Theil, und das quadrat des dritten Theiles addiren; denn dieses quadrate enthält in sich die andere Dignität der Glieder [aa, bb, cc,] nebst einem Producte des ersten Gliedes zweymahl genommen in das anderen [$2ab$] und dritte [$2ac$] und noch einem anderen Producte des anderen Gliedes zweymahl genommen in das dritte [$2bc$]. Setzet $a = a + b + c$, und $b = d$, so kommet für das quadrat der quadrino mischen Wurzel $[a + b + c]^2 + 2[a + b + c]d + d^2 = aa + 2ab + 2ac + bb + 2ad + 2bc + 2bd + cc + 2cd + dd$. Derowegen müsset ihr zu dem quadrate der trinomischen Wurzel noch das Product aus der Summe der ersten drey Theile zweymahl genommen in den vierten Theil und das quadrat des vierten Theiles addiren; denn dieses quadrat begreifet in sich die quadrate der vier Theile [a^2, b^2, c^2, d^2, nebst einem Producte des ersten Theiles zweymahl genommen in das andere [$2ab$], dritte [$2ac$], vierte [$2ad$] und noch einem Producte des anderen Theiles zweymahl genommen in das dritte [$2bc$] und vierte [$2bd$] samt noch einem anderen Producte des dritten Theiles zweymahl genommen in das vierte [$2cd$.]. Solchergestalt sehet ihr, daß man mit geringer Mühe die quadrate aller polynomischen Wurzeln finden kan, weil man nur I.) aus einem jeden Gliede der gegebenen Wurzel ein quadraten machen II.) eines jeden Gliedes zweyfache so oft annehmen, als viele Glieder darauf folgen, und endlich III.) eines jeden Gliedes zweyfache mit so viel folgenden Gliederen, als deren sind, multipliciren darf: oder man kan, weil mehrere Glieder für eins angesehen werden, sich nach der binomischen Formul richten: denn $[a + b + c + d + e \text{ etc.}]^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2[a + b] + cc^2 + 2[a + b + c]d + d^2 + 2[a + b + c + d]e + e^2$ u. s. w. unendlich fort.

§. III.

Von Erhebung der Grössen zu der dritten Dignität.

116.) Wenn ihr ein Wurzel zu der dritten Dignität erheben sollet, müsset ihr sie durch sich selbst zweymahl, oder ihr quadrate durch die Wurzel einmal multipliciren; so zeiget das Product, aus was für Theilen die dritte Dignität zusamen gesezt wird. Es sey demnach die andere Dignität:

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + bb \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + bb \\ \quad + a^2b + 2abb + b^3 \\ \hline \end{array}$$

so ist $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ die verlangte dritte Dignität.

117.) Die dritte Dignität einer binomischen Wurzel enthält in sich die dritte Dignität der beyden Theile [a^3 und b^3] und ein Product aus dem quadrate des ersten Theiles dreymahl genommen [$3a^2$] in den anderen [b] nebst noch einem anderen Producte aus dem ersten Theile dreymahl genommen [3 a] in das quadrat des anderen Theiles [b^3]

118.) Setzet a = a + b, und b = c, so kommet für die dritte Dignität der trinomischen Wurzel a + b + c heraus $[a+b]^3 + 3[a+b]^2c + 3[a+b]c^2 + c^2 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$. Und also müsset ihr zu der Dignität der binomischen Wurzel noch das Product aus dem quadrate der binomischen Wurzel dreymahl genommen $3[a+b]^2$ in

den

den dritten Theil c, das Product aus der binomischen Wurzel dreymahl genommen 3 [a+b] in das quadrat des dritten Theiles c^2 und die dritte Dignität desselben Theiles c^3 addiren; denn sie enthält in sich den Cubum des ersten Gliedes [a^3], das quadrat des ersten Gliedes dreymahl genommen, und durch das andere multiplicirt [$3a^2b$], das quadrat des ersten Gliedes dreymahl genommen, und durch das dritte multiplicirt [$3a^2c$], das erste Glied dreymahl genommen, und durch das quadrate des anderen multiplicirt [$3ab^2$] nebst noch einem anderen Producte aus dem ersten Gliede sechsmahl genommen, und durch das andere [b] und dritte [c] multiplicirt [6abc.], das erste Glied [3a] dreymahl genommen, und durch das quadrate des dritten [cc] multiplicirt [3acc]. Die Cubos des anderen [b^3] und dritten Gliedes [c^3], nebst einem Producte aus dem quadrate des anderen Gliedes dreymahl genommen [3bb] in das dritte [c] $= (3b^2c)$ und noch einem anderen Producte aus dem anderen Gliede dreymahl genommen (3b) in das quadrate des dritten (cc) $= (3bc^2)$.

Setzet $a = a + b + c$ und $b = d$, so ist die dritte Dignität der quadrinomischen Wurzel $(a+b+c)^3 + 3(a+b+c)^2 d + 3(a+b+c)d + {}^2d^3$; folgends müsset ihr noch zu der Dignität der trinomischen Wurzel $(a+b+c)^3$ das Product aus dem quadrate der trinomischen Wurzel dreymahl genommen $3(a+b+c)^2$ in dem vierten Theil d, das Product aus der trinomischen Wurzel dreymahl genommen $3(a+b+c)$ in das quadrat des vierten Theiles d^2, und die dritte Dignität des vierten Theiles d^3 addiren; denn die quadrinomische Dignität enthält in sich die Cubos der vier Glieder (a^3, b^3, c^3, und d^3) und ein Producte aus dem quadrate des ersten Gliedes dreymahl genommen ($3a^2b$) in das andere (b) dritte (c) und vierte (d) nebst noch einem anderen Producte aus dem ersten Gliede dreymahl genommen (3a) in das quadrate des anderen (bb) dritten (cc) und vierten (dd). Ferner das erste Glied (a) sechsmahl genommen (6a) und multiplicirt durch das andere (b) und dritte (c) und durch das andere (b) und vierte (d) und durch das dritte (c) und vierte (d) nebst einem Producte aus dem quadrate des anderen Gliedes dreymahl genommen (3bb) in das vierte (d)

und dritte (c) samt noch einem anderen Producte aus dem anderen Gliede dreymahl genommen (3 b) in das quadrate des dritten (c c) und vierten (d d) weiters das dritte Glied sechsmahl genommen (6c) und durch das vierte (d) multiplicieret, nebst einem Producte aus dem quadrate des dritten dreymahl genommen (3 c c) in das vierte (d) und endlich das dritte Glied dreymahl genommen, und durch das quadrate des vierten (d d) multiplicieret; wie aus der folgenden quadrinomischen Dignität selbst zu erkennen: $a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 3ab^2 + 6abc + 6abd + 3ac^2 + 6acd + 3ad^2 + b^3 + 3b^2c + 3b^2d + 3bc^2 + 6cd + 3bd^2 + c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$. Solchergestalt sehet ihr, daß ihr nach der binomischen Regel auch die dritte Dignität einer jeden polynomischen Wurzel finden könnet; denn $(a + b + c + d + e$ ꝛc.$)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^3 + c^3 + 3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3$ u. s. w.

119.) Auf eben solche Weise könnet ihr für die höheren Dignitäten Regeln finden, wenn ihr derselben Natur genauer untersuchen wollet. Und unerachtet ich in den zwey folgenden Aufgaben zeigen werde, wie ihr anstatt unendlicher Regeln für unendliche Dignitäten, zu denen eine Grösse erhoben werden kan, eine einige finden könnet; so wird euch doch die Mühe nicht verdrüssen, wenn ihr auf gleiche Weise die Natur der Vierten, fünften, sechsten Dignität ꝛc. untersuchet. Denn diese Untersuchung selbst wird euch dienen, die allgemeine Regel zu erfinden.

§. IV.

Eine allgemeine Regel zu finden, nach welcher jede binomischen Wurzel zu jeder verlangten Dignität erhoben werden kan.

120.) Wenn ihr die Binomische Wurzel nach und nach zu ihren Dignitäten erhebet, wie beygefügte Tafel ausweiset, so werdet ihr wahrnehmen, daß eine jede Dignität aus verschiedenen Producten zusamen gesetzet ist, und diese Producte durch verschiedene Zahlen multiplicieret werden.

Es

Es entstehen aber diese Producte, wenn ihr jeden Theil der Wurzel zu allen niedrigeren Dignitäten, als die gegebene ist, erhebet, und sie verkehret in einander multipliciret. Z. E.

1										
a	b									
a^2	2a b	b b								
a^3	$3a^2b$	$3a\,b^2$	b^3							
a^4	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4a\,b^3$	b^4						
a^5	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5a\,b^4$	b^5					
a^6	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^5b^3$	$15a^2b^4$	$6a\,b^5$	b^6				
a^7	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7\,a\,b^6$	b^7			
a^8	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	8 a b 7	b8		
a^9	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	9ab8	b^9	
a^{10}	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	b^{10}.

In der sechsten Dignität sind alle Dignitäten von 1 bis zu der sechsten, der beyden Theile a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a^1, 1. und 1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6. multipliciret die erste Reihe in die andere, so bekommet ihr $a^6 + a^5 b + a^4 b^2 + a^3 b^3 + a^2 b^4 + a b^5 + b^6$, das ist, alle Producte, woraus die sechste Dignität bestehet, ausser denen Zahlen, welche sie multipliciren, und nach dem Exempel des Oughtred (clavis Mathem. c. 12. §. 6. p. m. 38.) sonderlich von denen Engelländeren Unciæ genennet werden. Derowegen, wenn der Exponente m ist, so sind die Producte $a^m + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + a^{m-3} b^3 + a^{m-4} b^4 + a^{m-5} b^5 + a^{m-6} b^6$ u. s. w. unendlich fort.

Die Unzen

1 + 1
1 + 2 + 1
1 + 3 + 3 + 1
1 + 4 + 6 + 4 + 1
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1
1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1
1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 rc.

werden gefunden, wenn ihr die Exponenten der Dignitäten, die in einander multiplicieret werden, unter einander schreibet, und den Bruch aus den zwey ersten Zahlen für die Unze des anderen Gliedes, den Bruch aus den beyden ersten oberen, und beyden ersten unteren Zahlen zur Unze des dritten Gliedes nehmet rc. Es sollen die Unzen für die sechste Dignität gefunden werden: so schreibet die angeführten Exponenten dergestalt unter einander:

6. 5. 4. 3. 2. 1.
1. 2. 3. 4. 5. 6.

Alsdenn ist $\frac{6}{1} = 6$. die Unze des anderen Gliedes, $\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} = 15$. die Unze des dritten, $\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = 20$. die Unze des vierten, $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$. die Unze des fünften, $\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = 6$. die Unze des sechsten, und endlich $\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = 1$. die Unze des lezten Gliedes.

121.) Auf

121.) Auf eben solche Art werden die Unzen gefunden, wenn die Exponenten undeterminiret sind. Man schreibet sie nemlich dergestalt unter einander:

$$m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ m-4.\ m-5.\ m-6.\ \text{rc. rc.}$$
$$1.\ 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.\quad 7.$$

und nimmet $\frac{m}{1}$ für die Unze des anderen Gliedes; $\frac{m.\ m-1}{1.\ 2.}$ für die Unze des dritten, $\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\quad 3.}$ für die Unze des vierten, $\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3,}{1.\ 2.\quad 3.\quad 4.}$ für die Unze des fünften, $\frac{m.\ m-1.\ m-2.}{1.\ 2.\quad 3.}$ $\frac{m-3.\ m-4}{4.\quad 5.}$ für die Unze des sechsten Gliedes, u. s. w. unendlich fort.

122.) Wenn ihr nun diese Uncias in die oben gefundene Producte multipliciret; so bekommet ihr für die Dignität m von $a + b$

$$a^m + \frac{m}{1.} a^{m-1} b + \frac{m.\ m-1.}{1.\ 2.} a^{m-2} b^2 + \frac{m.\ m-1}{1.\ 2.} \frac{m-2.}{3.} a^{m-3} b^3 + \frac{m.\ m-1.}{1.\ 2.} \frac{m-2.}{3.} \frac{m-3.}{4.} a^{m-4} b^4 + \frac{m.\ m-1.}{1.\ 2.} \frac{m-2,}{3.} \frac{m-3.}{4.} \frac{m-4.}{5.} a^{m-5} b^5 + \frac{m.\ m-1.}{1.\ 2.} \frac{m-2.}{3.} \frac{m-3.}{4.} \frac{m-4.}{5.} \frac{m-5.}{6.} a^{m-6} b^6 \ \text{rc.}$$

das ist, weil $a^{m-1} = a^m : a$, $a^{m-2} = a^m : a$. $a^{m-3} = a^m : a^3$ $a^{m-4} = a^m : a^4$ rc. (§. I. n. 103.)

$$a^m + \frac{m\ a^m\ b}{a} + \frac{m.\ m-1.}{1.\ 2.} \frac{a^m\ b^2}{a^2} + \frac{m.\ m-1.}{1.\ 2.} \frac{m-2.}{3.} \frac{a^m\ b^3}{a^3}$$

$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.3.4.} \frac{a^m b^4}{a^4} + \frac{m.m-1\,m-2.m-3.m-4.}{1.2.3.4.5.} \frac{a^m b^5}{a^5} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.}{1.2.3.4.5.6.} \frac{a^m b^6}{a^6}$ rc.

Wenn ihr nun ferner a = P und b : a = Q, das erste Glied = A, das andere = B; das dritte = C, das vierte = D, das fünfte = E. u. s. w. setzet; so findet ihr endlich $(P + PQ)^m = P^m + mAQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5}EQ + \frac{m-5}{6}$ u. s. w. unendlich fort.

Also habet ihr eine allgemeine Regel gefunden, nach welcher ihr eine jede binomische Wurzel zu einer jeden verlangten Dignität erheben könnet. Z. E. Ihr verlanget die vierte Dignität von 18 oder 10 + 8, so ist m = 4, P = 10, Q = 8 : 10 = 4 : 5. folgends $P^m = 10^4 = 10000 = A$.

$$m.\ A\,Q = 4.\ 10000.\ \tfrac{4}{5} = 32000 = B$$

$$\frac{m-}{2} B\,Q = \tfrac{3}{2}\ 32000.\ \tfrac{4}{5} = 38400 = C$$

$$\frac{m-2}{3} C\,Q = \tfrac{2}{3}.\ 38400.\ \tfrac{4}{5} = 20480 = D$$

$$\frac{m-3}{4} D\,Q = \tfrac{1}{4}.\ 20480.\ \tfrac{4}{5} = 4096 = E$$

$$\frac{m-4}{6} E\,Q = 0.\ 4096.\ \tfrac{4}{5} = 0 = F$$

comm

10000	=	A
32000	=	B
38400	=	C
20480	=	D
4096	=	E
104976. vierte Dignität von 18.		

§. V.

Die vorgehende allgemeine Regel noch auf ein andere Art zu finden.

123.) Ihr werdet vielleicht meinen, daß man mit leichter Mühe durch das gewöhnliche multipliciren die gegebenen Grössen zu der verlangten Dignität erheben kan, und dannenhero die gefundene allgemeine Regel für unnütze, diese folgende aber für überflüßig halten. Allein ihr sollet zu seiner Zeit erfahren, wie sehr ihr euch in eurer Meinung betrogen, wenn ihr ihren vielfältigen Nutzen verspühren werdet. Jezt erinnere ich nur dieses. Wenn ihr aus einer gegebenen Zahl eine verlangte Wurzel ausziehen sollet; so könnet ihr die Regeln, nach welchen solches geschiehet, von euch selbst finden, wenn ihr durch die gefundene allgemeine Regel, oder nach dieser folgenden die binomische Wurzel a + b zu der gehörigen Dignität erhebet; wie wir in dem folgenden Capitel mit mehrerem zeigen werden. Beynebens werdet ihr aus dieser Regel, von der wir dahier handlen, die Natur, und Eigenschaften der Dignitäten weit vollkommener, als durch die vorhergehende, erforschen, und erkennen können.

124.) Wenn ihr die in der §. IV. n. 120. beygehenden Tafel erhobene Potenzen recht genau betrachtet, werdet ihr wahr nehmen

I.] Daß eine jede Dignität ein Glied mehrer habe, als ihr Exponente Einheiten enthält; folgends, daß das Quadrat 3, der Cubus 4, das Biquadrat 5, die fünfte Dignität 6, und die sechste 7 Glieder ꝛc. in sich begreife.

125.) II.] Daß das erste Glied sich allezeit um Eins verminderе, und wo dieses sich verminderet, das andere sich vermehre. Wie wir kürze halben, aus dem Biquadrate zeigen wollen; da ist das erste Glied [a^4] das andere um Eins geringer [a^3] und so das dritte [a^2] das vierte [a]; hingegen ist das erste Glied des anderen Theiles [b] im dritten Glied [bb] im vierten [b^3] und im fünften [b^4]; deswegen steiget das eine auf, wo das andere absteiget.

126.) III.] Daß der Coefficient des anderen Gliedes dem Exponente des ersten Gliedes gleich sey.

127.) IV.] Daß der Coefficient des dritten Gliedes die helffte sey von dem Producte, welches herauskommet, wenn man den Exponenten, und Coefficienten des anderen Gliedes durch einander multipliciret.

128.) V.] Daß der Coefficient des vierten Gliedes ein Drittheil von dem Producte sey, welches herauskommet, wenn man den Exponenten durch den Coefficiente in dem dritten Gliede multipliciret.

129.) VI.] Daß der Coefficient des fünften Gliedes ein Viertheil von dem Producte sey, welches herauskommet, wenn man den Exponenten und Coefficienten des vierten Gliedes durch einander multipliciret; folgends, werden für die folgende Glieder die Coefficienten gefunden, wenn ihr den Exponente und Coefficiente des vorhergehenden Gliedes durch einander multipliciret, und das Producte, welches herauskommet, mit des nemlichen Gliedes Zahl dividiret; so findet ihr z. E. den Coefficiente des sechsten Gliedes, wenn ihr den Exponente und Coefficiente des fünften Gliedes durch einander multipliciret, und das herauskommende Product mit der Zahl 5 dividiret; den so giebet der Quotient den gesuchten Coefficiente.

Des-

Desgleichen wird der Coefficient für das siebente Gliede gefunden, wenn man den Coefficiente und Exponente des sechsten Gliedes durch einander multipliciret, und das Producte, welches herauskommet, mit der Zahl 6 dividiret. u. s. w.

130.) VII.] Daß die Dignitäten, deren Exponente gerade Zahlen [2. 4. 6. 8. ꝛc.] sind allezeit ein Mittler-Glied haben, wessen Coefficient die gröste Zahl unter all übrigen Gliedern vorstellet.

131.) VIII.] Daß die Dignitäten, deren Exponente ungerade Zahlen [3. 5. 7. 9. ꝛc.] sind, zwey Mittler-Glieder führen, deren Coefficiente gleiche sind.

132.) IX.] Daß die Glieder, welche dem Mittler-Gliede vorgehen, und auf dasselbe folgen, von gleicher Art, und Beschaffenheit seyen; dergestalt, daß diejennige, welche lincks, und rechts gleichweit von dem Mittler-Gliede entfernet sind, gleiche Coefficienten, und Exponenten haben.

133.) Jezt habet ihr die vornehmste Eigenschaften der Dignitäten, die das Mehr-Zeichen haben, vernommen; wollet ihr nun auf gleiche Weise auch die Natur der anderen, die das Minder-Zeichen führen, untersuchen, so werdet ihr wahrnehmen, daß I) diejenige Dignitäten, deren binomische Wurzeln beyde Zeichen + und − führen, wechselweis das + und − Zeichen haben; dergestalt, daß, wenn das erste Glied + hat, das andere −, das dritte +, und das vierte − ꝛc. habe,

II.) Daß, wenn die beyde Theile einer binomischen Wurzel $-a-b$, das Minder-Zeichen haben, die Dignitäten deren Exponente gerade Zahlen [2. 4. 6. 8. ꝛc.] sind, durchaus in allen Gliederen das Mehr-Zeichen führen; hingegen diejennige, deren Exponente ungerade Zahlen [3. 5. 7. 9. ꝛc.] sind, das Minder-Zeichen durchaus in allen Gliederen haben; deswegen ist von $-a-b$ das Quadrate $+a^2+2ab+bb$, und der Cubus $-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$.

134.) Wenn ihr nun das, was ihr bisdahin von der Natur, und Eigenschaften wahrgenommen, zu Nutzen ziehen, und eine allgemeine Regel, nach welcher ein jede binomische Grösse zu jeder verlangten Dignität erhoben werden kan, finden wollet, wird dieses zu thun euch nicht viel Mühe kosten, wenn ihr diese Anmerkungen für Grund-Regeln eures Vorhabens annehmet. Es sey Z. E. $m - q$ zur fünften Dignität zu erheben. Da wisset ihr aus der ersten Regel n. 124. daß dieselbe 6. Glieder haben werde, weil sie ein Glied mehr haben muß, als ihr Exponente 5. Einheiten enthält. 2.] Sehet ihr aus dem n. 133. daß, weil ein Theil dieser Wurzel das Minder-Zeichen führet, die Glieder wechselweis + und − haben werden; dergestalt, daß, weil das erste Glied + hat, das andere −, das dritte +, das vierte −, das fünfte +, und das sechste − haben müsse. 3.] Erhellet aus dem n. 125. daß die Glieder, weil das erste immer um Eins vermindert, wo das andere um eben so viel vermehret wird, solchergestalt fortgehen: m^5, m^4, m^3, m^2, m, uud q, q^2, q^3, q^4, q^5. Nun sind die Glieder, Zeichen, Buchstaben, und Exponenten der verlangten Dignität richtig, und stehen, wie dahier: $m^5 - m^4q + m^3q^2 - m^2q^3 + mq^4 - q^5$. So bleiben nur noch die Coefficienten zu berechnen übrig. Da wisset ihr aus dem n. 126. daß, weil der Coefficient des anderen Gliedes dem Exponente des ersten gleich ist, dieser dahier 5, und daher das andere Glied $- 5m^4q$ seyn müsse. Aus dem n. 127. bekommet ihr den Coefficienten des dritten Gliedes, wenn ihr den Exponente des anderen Gliedes [4] durch desselben Coefficiente [5] multiplicieret, und von dem Producte [20] die helfte [10] für den gesuchten Coefficiente annehmet. Ferners wisset ihr aus dem n. 131. daß diese verlangte fünfte Dignität, weil ihr Exponente [5] ein ungerade Zahl ist, zwey Mittler-Glieder haben werde, folgends müsse der Coefficiente, weil beyde Mittler-Glieder gleiche sind, des vierten Gliedes abermahl [10] seyn. Endlich lehret n. 132. daß diejenige Glieder, welche von dem Mittler-Gliede gleichweit abstehen, gleiche Coefficienten führen; da nun das fünfte Glied von dem vierten eben so weit, als das andere von dem dritten entfernet ist, so folget, daß das fünfte Glied eben den Coefficienten haben müsse, welchen das andere hat; nun

hat dasselbe [5], deßwegen muß auch dieses [5] bekommen. Ein gleiche Beschaffenheit hat es auch mit dem sechsten Gliede. Wenn ihr jetzt diese gefundene Coefficienten zu ihren gehörigen Gliederen setzet, kommet die fünfte Potenz von $m - q$ heraus, wie sie dahier stehet: $m^5 - 5m^4q + 10m^3q^2 - 10m^2q^3 + 5mq^4 - q^5$. demnach habet ihr auf eine weit nützlichere Weise eine allgemeine Regel gefunden, nach welcher ihr mit sehr grossem Vortheile eine jede binomische Wurzel zu einer jeden verlangten Dignität erheben könnet.

§. VI.

Die Brüche zu ihren Dignitäten zu erheben.

135.) Wenn ihr Brüche zu ihren Dignitäten erheben sollet, dörfet ihr nur den Zehler, und den Nenner als ungebrochene Grössen ansehen, und einen jeden besonders nach der gegebenen Lehre zur verlangten Dignität erheben, so werdet ihr die Brüche eben so leicht, als die anderen Grössen zu ihren Dignitäten erheben können. Z. E. sey $\frac{a}{b}$ zum quadrate zu erheben. Bildet euch ein, man begehre das quadrate von a, und b eines jeden insonderheit, und machet aus jenem aa, und aus diesem bb [n. 99.] hernach setzet beyde Bruchweis über ein ander, so ist $\frac{a}{b} = \frac{aa}{bb}$. Das verlangte quadrat von $\frac{a}{b}$. Item wenn ihr $\frac{a}{b^3}$ zum biquadrate erhebet, wird $\frac{a}{b^3} = \frac{a^4}{b^{12}}$. Ferners ist das quadrat von $\frac{a+d}{c} = \frac{aa + 2ad + dd}{cc}$

136.) Ein gleiche Beschaffenheit haben auch die Zahlen Z. E. wenn ihr $\frac{3}{4}$ zum quadrate erheben sollet, dörfet ihr nur den Zehler 3, und Nenner 4 besonders in sich selbsten multiplicieren, und die Producte, welche herauskommen, wie die Brüche, über einander setzen, so wird $\frac{3}{4}$ im quadrate zu $\frac{9}{16}$. u. s. w. von anderen.

§. VII.

Kürtzere Ausdruckung, oder Andeutung der Dignitäten, zu welchen die Grössen hätten erhoben werden sollen.

137.) Ihr könnet bisweilen, die Mühe zu erspahren, wenn es die Umstände zu lassen, die Erhebung der Dignitäten, anstatt ihr dieselbe würklich verrichtet, nur blos durch ein kürzere Ausdruckung andeuten; dieses geschiehet, wenn ihr oben über die Grössen, welche erhoben werden sollen, ein liegendes Strüchlein mit angehenkten Exponente der verlangten Dignität ziehet; denn solchergestalt wird der Exponente den Grad, zu welchem die Grössen hätten erhoben werden sollen, anzeigen. Z. E. Wenn ihr a + b + c + d − x zu der achten Potenz erheben sollet, dörfet ihr nur über die gegebenen Grössen ein Strüchlein ziehen, welches sich auf alle Buchstaben erstrecket, und den Exponente 8 der verlangten Dignität zu Ende des gezogenen Strüchleins beyfügen; denn solchergestalt gilt $\overline{a + b + c + d - x}^{\,8}$ eben so viel, als wenn diese Grösse würklich zu der achten Dignität wäre erhoben worden. Nach dieser Lehre zeiget $\overline{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}^{\,9}$ die neunte Dignität von $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ an. u. s. w. Diese Andeutung der Dignitäten kan mit grossem Vortheile in verschiedenen Fallen angebracht werden, und wenn ihr euch dabey der Exponential-Rechnung, wie wir sie zu Anfang dieses Capitels beschrieben haben, bedienet, werdet ihr zu seiner Zeit ihren vielfältigen Nutzen verspühren.

138.)

138.) Damit ihr aber den Gebrauch der Exponential-Rechnung dabey deutlich erkennen möget; will ich euch denselben mit Exempeln erläuteren. Ihr verlanget zu wissen das Product, welches herauskommet, wen ihr $\overline{c+d}^3$, das ist, die dritte Potenz von c + d, durch sein Biquadrate multipliciren sollet, addiret den Exponente 3 der dritten Dignität, zu dem Exponente 4 der vierten Dignität, so ist die Summe 7 der Exponente des neuen Productes $\overline{c+d}^7$.

139.) Auf gleiche Weise wird auch die Exponential-Division angebracht. Wenn ihr nemlich eine Dignität durch eine andere von einerley Wurzeln dividiren sollet, so müsset ihr den Exponente des Divisoris von dem Exponente des Dividendi subtrahiren, und das übergebliebene für den Exponente des gesuchten quotienten annehmen. Wenn ihr z. E. die sechste Dignität eines quadrinomii $\overline{a+b+c+d}^6$ durch sein dritte Dignität dividiren sollet, so müsset ihr den Exponente 3 der dritten Dignität von dem Exponente 6 der sechsten Dignität subtrahiren, und den Rest 3 für den Exponente des verlangten quotientens $\overline{a+b+c+d}^3$ annehmen.

140.) Endlich, wenn man aus einer gegebenen Dignität ein verlangte Wurzel ziehen soll, muß bey dem quadrate $\frac{1}{2}$, Cubo $\frac{1}{3}$, Biquadrate $\frac{1}{4}$ etc. von ihrem Exponente genommen werden; damit die gesuchte Wurzel herauskommet (n. 109.) Wenn z. E. die Cubic-Wurzel aus der neunten Dignität des Trinomii $\overline{a+b+c}^9$ ausgezogen wird, so muß $\frac{1}{3}$ von dem Exponente 9 genommen, und für die gesuchte Wurzel $\overline{a+b+c}^3$ angeschrieben werden.

141.) Dahier solle erinneren, daß diese Exponential-Rechnung sich nicht auf alle Grössen ohne Unterscheide erstrecken könne, sonderen nur von einerley Gattung der Grössen zu verstehen sey; denn wiedrigen Falles wäre Gefahr, daß man in ein Irrthum verfiele.

142.) Ihr habet ferner noch bey dieser Weise die Potenzen anzudeuten, zu merken, daß, wenn ein so bemerkte polynomische Grösse oder Dignität durch ein andere Grösse zu multiplicieren wäre, ihr nur die gegebenen nach ihrer Ordnung, und vor- oder nach denselben das gewöhnliche Multiplications-Zeichen $\times$ (n. 5.) oder ein Puncte (.) nebst dem Multiplicante ansetzen dörfet. Z. E. Wenn ihr $\overline{b+c+d}^2$ durch a multiplicieren sollet, so schreibet ihr nur $\overline{b+c+d}^2 \times a$ oder $(\overline{b+c+d}^2)\,a$; denn, wenn ihr $b+c+d$ ordentlicher Weise durch a multiplicieren wollet, dergestalt, daß das Product $ab+ac+ad$ herauskommet, multiplicieret ihr anstatt des quadrates seine Wurzel, welches ein grosser Irrthum wäre. Ingleichen, wenn man $\overline{a+b+d}^4$ durch $a+b$ multiplicieret, so kommet im Producte $\overline{a+b+d}^4 \times \overline{a+b}$ heraus. Wobey in acht zu nehmen, daß die über den Multiplicante $a+b$ gezogene Linie andeuten wolle, daß die Multiplication so wohl durch a als b geschehen müsse; denn wenn diese Linie sich nur bis auf a erstreckete, wäre es ein Zeichen, daß die vierte Dignität $\overline{a+b+d}^4$ durch a multiplicieret, und zu b addiret werden solle.

143.) Ein gleiche Bewandtniß hat es auch mit dem dividiren. Wenn ihr Z. E. $\overline{aa+2ab+bb}^3$ durch $a+b$ dividiren wollet, könnet ihr nicht $a+b$ schreiben, sondern ihr müsset nur blos die Division durch das gewöhnliche Zeichen (n. 6.) andeuten, und für den quotiente $(\overline{aa+2ab+bb}^3):(a+b)$ anschreiben; denn, wenn ihr die Division ordentlicher Weise verrichten wollet, dividiret ihr anstatt der dritten Dignität ihre Wurzel, weil $aa+2ab+bb$ nur die Cubic Wurzel von dieser. $\overline{aa+2ab+bb}^3$ vorstellet.

§. VIII.

§. VIII.
Lehrsätze über die Dignitäten.

144.) Wenn man zum quadrate einer Grösse die Wurzel zweymahl genommen, und Eins addiret, so giebet die Summe das quadrat einer Zahl, aus welcher die gezogene Wurzel um Eins grösser ist, als die Wurzel des gegebenen quadrates. Z. E. Dienen uns die Wurzeln der quadrate m und n. Setzet zu dem quadrate (m^2), die Wurzel zweymahl genommen (2m) nebst der Einheit, so giebet die Summe ($m^2 + 2m + 1$) ein quadrate, welches dem anderen (nn). gleichet; es ist aber die Wurzel des quadrates (nn) um Eins grösser, als die Wurzel des quadrates (m^2); folgends rc. denn machet $m = 4$, und $n = 5$, so ist $2m = 8$, nebst der Einheit, $= 9$ und dem quadrate ($m^2 = 16$) zusamen: $16 + 8 + 1 = 25 = m^2 + 2m + 1$. eine Zahl, daraus die quadrat-Wurzel $5 = n$ um eines grösser ist, als die Wurzel $4 = m$. W. Z. E.

145.) Wenn man zum quadrate einer Grösse Eins addiret, und von der Summe die Wurzel zweymahl subtrahiret, so bleibet ein quadrat-Zahl übrig; daraus die Wurzel um Eins kleiner ist, als die Wurzel des gegebenen quadrates. Es sey Z. E. die Wurzel 4. Setzet zu desselben quadrate [16] noch 1, und ziehet von der Summe [17] die Wurzel [4] zweymahl genommen [8] so bleibet das quadrat [9] übrig, wessen Wurzel [3] um Eins kleiner ist als [4]

146.) Wenn zu der dritten Dignität einer Zahl die Wurzel samt ihrem quadrate dreymahl genommen, nebst einer Unität addiret wird, so ist die Summe ein Cubus, wessen Wurzel um Eins grösser ist, als die Wurzel des gegebenen. Es sey Z. E. die Wurzel (m) Setzet zu (m^3) noch ($3m^2$) nebst (3m) und der Einheit, so ist die Summe ($m^3 + 3m^2 + 3m + 1$) ein Cubus, wessen Wurzel um eins grösser ist, als die Wurzel des gegebenen Cubi. Machet $m = 4$:

und addiret zu $m^3 = 64$ noch $3m^2 = 48$, nebst $3m = 12$, und der Einheit, so ist $64 + 48 + 12 + 1 = 125$. ein Cubus der Wurzel [5] welche um Eins grösser ist, als die Wurzel [4] des gegebenen Cubi [64]

147.) Wenn zu der dritten Dignität einer Grösse dreymahl die Wurzel gesetzet, und von der Summe das quadrate eben dieser Wurzel dreymahl genommen nebst der Einheit abgezogen wird, so bleibet ein Cubus übrig, wessen Wurzel um Eins kleiner ist, als die Wurzel des gegebenen Cubi. Es sey Z. E. die Wurzel [4] addiret zu desselben Cubum [64] die Wurzel dreymahl genommen [12] und ziehet von der Summe $(64 + 12 = 76)$ dreymahl das quadrate dieser Wurzel und Eins [49]; so ist das übrige [29] annoch ein Cybus einer Wurzel [3] die um eines geringer ist, als die Wurzel [4]

148.) Wenn zu einem Biquadrate viermahl der Cubus, sechsmahl das quadrat, und viermahl die Wurzel nebst einer Unität gesetzet wird, so kommet in der Summe ein anderes Biquadrate heraus, wessen Wurzel um Eins grösser ist, als die Wurzel des gegebenen. Z. E. Sey die Wurzel $m = 5$; addiret zu $(m^4 = 625)$ noch $(4m^3 = 500)$ und $(6m^2 = 150)$ auch $(4m = 20)$ samt der Einheit; so ist die Summe $(m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 = 1296.)$ das Biquadrate der Wurzel [6] welche um Eins grösser ist, als die gegebene [5] W. Z. E.

149.) Addiret zu dem Biquadrate einer Grösse sechsmahl das quadrate der Wurzel, und Eins; subtrahiret davon sechsmahl den Cubum, und viermahl die Wurzel, so bleibet ein Biquadrat übrig, wessen Wurzel um Eins geringer ist, als die Wurzel des gegebenen. Es sey Z. E. die Wurzel $= 4$; addiret zu derselben Biquadrate $= 256$ sechsmahl das quadrat $= 96$; und Eins; subtrahiret davon $(256 + 96 + 1 = 353)$ viermahl den Cubum $= 256$, und die Wurzel viermahl $= 16$, so bleibet das Biquadrate [81] der Wurzel [3] übrig, welche um Eins geringer ist, als die gegebene [4]

Das fünfte Capitel
Von Ausziehung der Wurzeln.
§. I.
Von Ausziehung der Quadrat-Wurzel.

150.) Die Quadrat-Wurzel aus einer gegebenen Grösse auszziehen, ist diejenige Grosse finden, die durch sich selbst multipliciret, die gegebene Grösse hervorbringet. Ihr habet in des vorhergehenden Cap. §. II. n. 113. auf eine sehr leichte Art einen allgemeinen Lehrsatz gefunden, daraus wir die Ausziehung der Wurzeln hergeleitet haben; denn in Erwegung, daß das quadrate $a^2 + 2ab + bb$, eines Binomi in sich begreifet, die beyde quadrate des ersten und anderen Theils nebst einem Producte aus dem ersten Theile zweymahl genommen in den anderen, werdet ihr wahrnehmen, daß, wenn ihr in der ersten Classe zur Lincken das darinnen befindliche quadrat [a^2] abziehet, der erste Theil der Wurzel [a] herauskommet. Wollet ihr nun auch den anderen finden, so müsset ihr mit [2 a], das ist, mit dem gefundenen quotiente zweymahl genommen die folgende Grösse [2 a b] dividiren, und hernach nicht allein das Product aus dem Divisore [2 a] in dem neuen quotienten

[b]

[b] sonderen auch das quadrat des neuen quotientens [b^2] davon subtrahiren. Wenn ihr dieses zum voraus betrachtet, so wird es euch leicht fallen, aus dem quadrate [bb+2bc+cc] die Wurzel auszuziehen; denn ihr dörffet euch nur in Gedancken die allgemeine Formul [a^2+2ab+bb] vorstellen, und nach der erst gegebenen Lehre die quadrat-Wurzel [b] aus [bb] ziehen, so habet ihr den ersten Theil [b] der verlangten Wurzel, welchen ihr nebens an ihren gehörigen Ort setzet, wie dahier aus der Operation selbst zu ersehen.

```
bb + 2bc + cc | b + c
bb + 2bc + cc |
--------------
 *     *    *
```

Demnach nehmet den gefundenen quotiente [b] zweymahl [2 b] schreibet dasselbe unter [2bc] dividiret damit auf gewöhnliche Art, und setzet den quotiente [c.] an seinen gehörigen Ort, so habet ihr den anderen Theil der binomischen Wurzel auch gefunden multipliciret mit dem gefundenen quotiente [c] den Divisorem [2 b] und ziehet das Product [2bc] von [2bc] so bleibet von diesem Gliede nichts übrig. Machet ferner aus [c] das quadrat [cc] und ziehet dieses von jennem ab, so gehen alle Glieder auf, und kommet die verlangte Quadrat-Wurzel [b+c] heraus.

151.) Wenn die Wurzel aus mehr, als zwey Theilen bestehet, darf man nur die ersten zwey, oder mehrere derselben als einen Ansehen, und übrigens verfahren, wie bey den binomischen Wurzeln. Es sey Z. E.

```
bb − 2bd + dd + 2bc − 2dc + cc | b − d + c
bb + 2b          + 2b   − 2d   |
--------------------------------
 * − 2bd + dd + 2bc − 2dc + cc |
--------------------------------
      *     *     *     *     *
```

Nehmet aus dem quadrate (bb) die Wurzel (b), schreibet (b) in die Stelle des quotienten, multipliciret (b) durch (b), und ziehet das

Producte

Producte (bb) von (bb); so verschwindet das erste Glied. Dupliret die gefundene Wurzel (b=2b) dividiret damit in −2bd, und setzet den quotiente (−d) an seinen gehörigen Ort; so habet ihr den anderen Theil der Wurzel. Multipliciret (2b) durch (−d) und ziehet das Product (−2bd) von (−2bd) so bleibet von diesem Gliede nichts mehr übrig. Machet aus (−d) das quadrat (+dd) und ziehet dieses von jennem ab, so wird auch dieses Glied aufgehoben Dupliret die zwey ersten Theile (b−d) der Wurzel; weil ihr sie nach Lehre der allgemeine binomischen Formul als eine ansehen könnet, und schreibet (+2b−2d) unter (+2bc−2dc); dividiret damit, und setzet den quotiente (c) für den dritten Theile der Wurzel. Multipliciret die Divisores (+2b−2d) durch den quotiente (c), und ziehet die Producte (+2bc−2dc) von jennen ab, so verschwinden das vierte und fünfte Glied. Machet aus (c) das quadrat (cc) und ziehet dieses von jennem ab, so ist, weil nichts übrig bleibet, die gefundene Wurzel (b−d+c) ganz richtig.

152.) Wenn es sich erreignet, daß die Glieder der Dignität, daraus man die Wurzeln ziehen soll, mit Coefficienten begleitet werden, so dörfet ihr, weil die Buchstaben, nicht wie die Zifferen, eine Bedeutung von der Stelle haben, in welcher sie stehen, euch hier an keine Ordnung binden, sonderen möget die Wurzeln suchen, in welchem Gliede, nach Belieben, ihr sie findet, folgends euch ein solches, aus wessen Coefficiente sich die Wurzel leichte ziehen lässet, für das Erste erwählen. Z. E. Wenn ihr aus 169bb+286bd+78bc+121dd+66dc+9cc die Quadrat-Wurzel ziehen sollet, dörfet ihr das lezte Glied (9cc) in die Stelle des Ersten setzen, wie dahier:

9cc+66dc+121dd+78bc+286bd+169bb 9cc+6c	3c+11d+13b
* 66dc+121dd+78bc+286bd+169bb	
* * * * *	

Ziehet die Wurzel (3c) aus (9cc); dupliret (3c) = (6c) dividiret damit in (66dc) so giebet der quotient (+11d) den anderen Theil der Wurzel. Machet das quadrat aus 11d = 121dd; und ziehet dieses von jennem ab, so verschwindet dieses Glied. Dupliret (3c+11d = 6c+22d); denn ihr dörfet sie als ein Glied ansehen, und dividiret damit, so giebet der quotiente (13b) den dritten Theil der Wurzel. Multipliciret (6c+22d) durch (13b) und ziehet die Producte (78bc+286bd) von jennen ab, so bleibet nur noch das quadrate (169bb) übrig. Deßwegen machet auch aus (13b) das quadrat (169bb) und ziehet es von jennem ab, so bleibet nichts mehr übrig. Dannenhero ist die gesuchte Wurzel (3c+11d−13b).

153.) Wenn ihr aus einer gegebenen Zahl die Quadrat-Wurzel ausziehen sollet, könnet ihr also verfahren: theilet dieselbe von der Rechten gegen die Lincke zu in Classen, und gebet jeder zwey Ziferen; denn so viele Theile hat die Wurzel, als Classen herauskommen. In der lezten Classe aber zur Lincken kan auch eine Ziffer alleine stehen. Ihr verlanget z. E. zu wissen die Quadrat-Wurzel aus 4831204. Nach geschehener Eintheilung nehmet zu handen das allgemeine Exempel $a^2+2ab+bb$; denn, obschon dasselbe eigentlich nur auf binomische Wurzeln gerichtet ist, kan es dannoch auf gleiche Weise, weil ihr mehrere gefundene Theile der Wurzel für einen Ansehen könnet, eine jede polynomische Wurzel zu finden mit grossem Vortheile angebracht werden; denn ihr sehet daraus, daß wenn ihr in der ersten Classe zur Lincken das darinnen befindliche quadrat (a^2) abziehet, ihr den ersten Theil der Wurzel (a) habet. Wollet ihr nun auch den anderen finden, so müsset ihr mit (2a) das ist, mit dem gefundenen quotienten zweymahl genommen, die folgende Zahl (2ab) dividiren, und hernach nicht allein das product aus dem Divisore (2a) in den neuen Quotienten (b) sondern auch das quadrat des neuen quotienten (b^2 subtrahiren; die Operation stehet wie dahier:

4.

4. 83. 12. 04.	2198	
2		
* 83		$aa = 4$
41		$a = 2$
42. 12		$b = 1$
4 29		$2ab = 4$
351. 04		$2a = 42$
43 88		$a = 21$
****		$b = 9$
		$2a = 438$
		$b = 8$
		$bb = 64.$

Da nun in der ersten Classe zur Lincken das quadrat des ersten Theiles der Wurzel (a) zu finden, so suchet in der folgenden Tafel das quadrat auf, welches der Zahl (4) in der ersten Classe am nächsten kommet, machet $4 = aa$, und desselben Wurzel $2 = a$, ziehet dieses von jennem ab, und setzet die dazu gehörige Wurzel (2) in die Stelle des quotienten; so habet ihr den ersten Theil derselben gefunden. Wollet ihr nun den anderen finden, so müsset ihr mit $2a = 4$, das ist, mit dem gefundenen quotienten zweymahl genommen $2 = 4$, die folgende Zahl $2ab = 83$ dividiren, und hernach nicht allein das Product aus dem Divisore ($2a = 4.$) in den neuen quotienten ($b = 1.$) sondern auch das quadrat des neuen quotienten ($b^2 = 1$) subtrahiren; so werdet ihr auch den anderen Theil der Wurzel haben. Damit ihr aber jezt auch den dritten Theil findet, so müsset ihr die beyde erste Theile ($21 = a + b$) für einen $= a$ ansehen, und mit demselben zweymahl genommen ($2a = 42$) die folgende Zahl $2ab = 4219$ dividiren, und so fort, wie Anfangs geschehen, eure Rechnung vollenden; so findet ihr die gesuchte Wurzel 2198 zu seyn.

§. II.

Von Ausziehung der Cubic-Wurzel.

154.) Die Cubic-Wurzel aus einer gegebenen Grössen ziehen ist diejenige Grösse finden, die durch sich selbst zweymahl multipliciret die gegebene Grösse hervorbringet. Ihr habet hier abermahls aus dem vorhergehenden Cap. §. III. n. 117. eine sehr vortheilhafte Regel, wie die Cubic-Wurzel aus einer gegebenen Dignität ausgezogen wird, gefunden; denn in Erwegung, daß die dritte Dignität

Wurzel	quadrate	Cubi	biquadrate	5te dignitäten	6te dignitäten	7te dignitäten
1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128
3	9	27	81	243	729	2187
4	16	64	256	1024	4096	16384
5	25	125	625	3125	15625	78125
6	36	216	1296	7776	46656	279936
7	49	343	2401	16807	117649	823543
8	64	512	4096	32768	262144	2097152
9	81	729	6561	59049	531441	4782969.

$(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$ einer binomischen Wurzel $(a+b)$ in sich enthält die dritte Dignität der beyden Theilen (a^3, b^3) und ein Producte aus dem quadrate des ersten Theiles dreymahl genommen in den anderen $(3a^2b)$ nebst noch einem anderen Producte aus dem ersten Theile dreymahl genommen in das quadrate des anderen $(3ab^2)$ werdet ihr wahrnehmen, daß, wenn ihr in der ersten Classe zur Lincken die daselbst befindliche dritte Dignität (a^3) abziehet, ihr den ersten Theil der Wurzel (a) habet; wenn ihr nun aus den übrigen Gliederen den anderen Theil finden wollet, müsset ihr das erste zur Lincken $(3a^2b)$ durch das quadrate des ersten dreymahl genommen $(3a^2)$ dividiren, und hernach nicht allein das Producte aus diesem Divisore $(3a^2)$ in den neuen quotienten (b) sonderen auch das Product aus dem quadrate des neuen quotientens (b^2) in den vorhergehenden dreymahl genommen (3a) und endlich die dritte Dignität des neuen quotientens (b^3) abziehen. Gleichwie ihr aber schon gesehen habet, daß die Regeln für die binomische Wurzeln auch dienen eine polynomische Wurzel zu der anderen und dritten Dignität zu erheben [n. 118.]; also gehet es auch an, daß ihr nach dieser allgemeinen Regel, die zwar eigentlich auch nur auf binomischen Wurzeln gerichtet ist, auf eine gleiche Weis, wenn ihr nämlich da, wie dort, mehrere Theile für einen ansehet, eine jede polynomische Wurzel ausziehet.

155.) Wenn ihr aus einer Zahl die Cubic-Wurzel ziehen sollet, müsset ihr erst dieselbe in Classen von der Rechten gegen die Linke eintheilen, und einer jeden drey Zifferen geben; denn so viel Theile hat die Wurzel, als Classen heraus kommen. Demnach suchet in der beygefügten Tafel die Cubic-Zahl, welche derjennigen, so in der lezten Classen zur Linken stehet, am nächsten kommet, ziehet diese von jenner ab, und setzet die dazu gehörige Wurzel in die Stelle des quotientens, so habet ihr den ersten Theil der Wurzel; diesen multiplicieret durch sich selbst, und das herauskommende quadrate durch 3, setzet das Producte unter die Cubic-Zahl in die Stelle des Divisoris, dergestalt, daß desselben lezte Zahl zur Rechten unter die erste zur Linken in der folgenden Classe zustehen kommet, und divi-

diret gewöhnlicher Massen; so kommet der andere Theil der Wurzel heraus. Multipliciret den Divisorem in den neuen quotienten, und schreibet das Product darunter: unter der Mittleren Zahl dieser Classe fanget an von der Rechten gegen die Lincke das Product aus dem quadrate des neuen quotientens dreymahl genommen in den vorhergehenden, und endlich unter der dritten die Cubic-Zahl des neuen quotienten anzuschreiben. Addiret diese drey Producte, und ziehet die Summe von denen in der gegebenen Zahl noch übrigen Zifferen ab, so ist der Sache genug gethan. Wie dieses alles aus dem allgemeinen Exempel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ deutlich erhellet. In den Falle, wo die Wurzel aus mehr, als zwey Zifferen bestehet, könnet ihr die ersten zwey, oder mehrere derselben als eine ansehen, und dabey wahrnehmen, daß jede Cubic-Zahl in sich enthalte die Cubic-Zahlen aller Theilen der Wurzel nebst dem Producte aus den quadraten der vorhergehenden Theilen zusamen dreymahl genommen in den nächstfolgenden, uud dem quadrate eines jeden nachfolgenden dreymahl genommen in alle vorhergehende zusamen. Damit ihr aber den Gebrauch dieser Regel deutlich erkennen möget: so will ich selbige mit einem Exempel erläutern. Ihr verlanget zu wissen, die Cubic-Wurzel aus:

40.001.688. | 342		$a = 3$
27		$a^3 = 27$
	108	$3a^2 = 27$
13.001.	144	$b = 4$
~~27~~	64	$3a^2b = 108$
12304		$3ab^2 = 144$
	12304	$b^3 = 64$
697.688.		$a = 34$
~~348~~ 8		
697 688	6936	$3a^2 = 3468$
	408	$b = 2$
*** ***	8	$3a^2b = 6936$
		$3ab^2 = 408$
	697688	$b^3 = 8.$

Suchet

Suchet in der beygefügten Tafel nach Anweisung der Formul $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ die dem ersten Theil [40] nächstkommende Cubic-Zahl; diese findet ihr $(3 = a)$ zu seyn; multipliciret 3 in sich selbst, und das herauskommende Producte $(9 = a^2)$ durch 3, und ziehet $(27 = a^3)$ von 40 ab, so bleiben 13. übrig. Dazu wird der nächstfolgende Theil (.001.) gesetzet; hernach dividiret ihr mit dem quadrate aus 3 dreymahl genommen $(3a^2 = 27)$ in 13001; so giebet der quotient $(4 = b)$ den anderen Theil der Wurzel. Multipliciret ferner das quadrate $(9 = a^2)$ durch 3, und den neuen quotiente $(4 = b)$ und schreibet, $(108 = 3a^2b)$ nebens auf die Seite; hernach multipliciret weiters die Wurzel $(3 = a)$ durch 3, und das Producte $(9 = 3a)$ durch das quadrate $(16 = b^2)$ des anderen Theiles, und schreibet $(144 = 3ab^2)$ um eine Reihe weiter gegen die Rechte unter die vorige Zahl (108.) endlich machet aus dem anderen Theile der Wurzel [4] den Cubum $(64 = b^3)$ schreibet [64] um eine Reihe weiter gegen die Rechte unter die zwey nebens gesezte Zahlen, ziehet darunter einen Strich, addiret sie zusamen, und ziehet die Summe $(12304 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$ von 13001. ab, so bleiben 697. übrig. Wenn ihr jezt die zwey erste Theile für einen ansehet, und aus $(34 = a)$ das quadrate machet, dasselbe dreymahl nehmet $(3a^2 = 3468)$ und damit dividiret, so kommet der dritte Theil der Wurzel $(2 = b)$ heraus. Das übrige wird alsdenn, wie bisher geschehen, vollendet; nach Anweisung der Formul kommen endlich zu subtrahiren $(697688 = 3ab^2 + 3a^2b + b^3)$ da findet ihr die Wurzel: [342] zu seyn.

§. III.

Eine allgemeine Regel zu finden aus allen Dignitäten eine verlangte binomische Wurzel zu ziehen.

156) Weil $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ [n. 109.], so ist das Wurzel ausziehen so viel als eine Grösse zu einer Dignität erheben, die zu ihrem Exponenten eine gebrochene Zahl hat. Derowegen

rowegen wenn ihr in der Vorhin gefundenen Regel anstatt des Exponenten m den Exponenten m : n setzet, so bekommet ihr eine allgemeine Regel, nach welcher so wohl jede Grösse zu einer verlangten Dignität erhoben, als aus derselben eine verlangte Wurzel gezogen werden kan. Es ist aber folgende: $\sqrt[n]{(P+PQ)^m} = P^{m:n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \frac{m-4n}{5n}EQ + \frac{m-5n}{6n}FQ$. u. s. w. unendlich fort.

157.) Diese sehr nützliche Regel hat der vortrefliche Geometra in Engelland Isaac Newton zu erst gefunden; und der Herr von Wolf zu erst in teutscher Sprache in seinen Anfangs-Gründen der Algebra uns solchergestalt beschrieben. Es ist aber diese Regel einerley mit der vorigen §. IV. n. 120. denn wie ihr m : n durch ganze Zahlen in dem Gebrauche derselben erkläret, wenn ihr n = 1 setzet: so könnet ihr auch in der vorigen Regel m durch einen Bruch erklären, wenn eine Wurzel ausgezogen werden soll. Z. E. Ihr setzet $m = \frac{1}{2}$, wenn ihr die Quadrat-Wurzel verlanget; $m = \frac{1}{3}$, wenn ihr die Cubic-Wurzel suchet. u. s. w.

158.) Damit ihr aber den Gebrauch der Regel deutlich erkennen möget; so will ich selbige mit einem Exempel erläutern. Ihr verlanget zu wissen die Quadrat-Wurzel aus $aa - xx$: so ist $m = 1$, $n = 2$, $P = a^2$, $Q = -x^2 : a^2$, folgends: $P^{m:n} = a = A$.

$$+ \frac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2}a - x^2 : a = -\frac{x^2}{2a} = B$$

$$+ \frac{m-n}{2n}BQ = \frac{1-2}{4} \cdot \frac{-x^2}{2a} \cdot \frac{-x^2}{a^2} = -\frac{x^4}{8a^3} = C$$

+

$$+\frac{m-2n}{3m}CQ=\frac{1-4}{6}\cdot\frac{-x^4}{8a^3}\cdot\frac{-x^2}{a^2}=-\frac{x^6}{16a^5}=D$$

$$+\frac{m-3n}{4n}DQ=\frac{1-6}{8}\cdot\frac{-x^6}{16a^5}\cdot\frac{-x^2}{a^2}=\frac{-5x^8}{128a^7}=E$$

$$+\frac{m-4n}{5n}EQ=1-8-5x^8-x^2=7x^{10}\ \&c.$$

Demnach ist $\sqrt{(a^2-x^2)}=a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}-\frac{7x^{10}}{256a^9}$ u. s. w. unendlich fort.

159.) Wenn man aus der gegebenen Grösse eine vollkomene Wurzel haben kan, so ist die Zahl der Glieder allezeit endlich. Hingegen wo dergleichen nicht vorhanden, so gehen die Glieder unendlich fort. Man nimmet aber von denselben so viele in jedem Falle als nöthig ist, bis nämlich durch Weglassung der übrigen kein mercklicher Fehler entstehet.

160.) Wenn einem diese Aufgabe zu schwer vorkommen solte, der kan sich in dem Falle, wo die Exponente gerade zahlen sind, folgender vortheilen bedienen.

§. IV.

Allgemeine Regel, aus allen Dignitäten, Deren Exponente gerade Zahlen sind, die verlangten Wurzeln auszuziehen.

161.) Das Fundament dieser Regel haben wir schon oben Cap. IV. §. I. n. 107. gründlich gelegt; denn daselbst ist ausführlich erwiesen worden, daß, wenn man die Wurzel der dritten Dignität aus x^{12} ziehen soll, der Exponente 12 der zwölfften Dignität durch den Exponente 3 der dritten dividiret werden müsse. Wenn ihr jezt dieses zum Grund dieser Regel annehmet; so werdet ihr von euch selbst auf die Gedancken kommen, daß, wenn die Biquadrat-Wurzel ausgezogen werden soll, man nur zweymahl die Quadrat-Wurzel ausziehen dörfe; denn der Exponente [2] stecket zweymahl in dem Exponente [4] des Biquadrates. Auf gleiche Weise wird bey der sechsten Dignität erst die quadrat- hernach die Cubic-Wurzel ausgezogen; denn durch Ausziehung der quadrat-Wurzel wird die sechste Dignität auf den dritten Grade erniedriget; folgends muß aus dem quotiente die Cubic-Wurzel ausgezogen werden. Dannenhero, wenn ihr wissen wollet, ob ihr die Quadrat- oder Cubic-Wurzel ausziehen sollet, dörfet ihr nur den gegebenen Exponente der Dignität, daraus die Wurzel gezogen werden soll, mit 2 oder 3 dividiren, und, wenn die Division mit 2 angehet, die quadrat- hingegen die Cubic-Wurzel ausziehen, wenn nur mit 3 kan dividiret werden. Deßwegen lässet sich auch aus der neunten Dignität, obschon ihr Exponente ein ungerade Zahl ist, wenn ihr die Cubic-Wurzel zweymahl nach einander ausziehet, die Wurzel richtig finden. Jngleichen wird die Wurzel der fünfzehenden Dignität gefunden, wenn ihr erst die Cubic- hernach die Wurzel der fünften Dignität ausziehet.

§. V.
Von Ausziehung der Quadrat-Wurzel
Durch Näherung.

162.) Wenn, nach ausgezogener Quadrat-Wurzel, ein Rest zum Vorscheine kommet, giebet derselbe ein untrügliches Kenn-Zeichen, daß die vorgelegte Zahl kein vollkomenes Quadrate gewesen sey, folgends desselben Wurzel noch durch ganze, noch durch gebrochene Zahlen vorgestellet werden könne; nicht durch ganze: weil, wenn dieses geschehen könnte, nichts überbliebe. nicht durch gebrochene: denn ein ganzes, so in einem Bruch stecket, wird durch die Multiplication untüchtig im Producte wieder ein ganzes zu geben; weil die Multiplication den Werthe des Bruches verminderet §. IX. n. 89. Eben dieses ereignet sich auch bey Ausziehung der Wurzeln aus den Brüchen; denn, da man besonders so wohl aus dem Zehler, als dem Nenner, welche in sich selbst betrachtet, ganze Zahlen sind, die Wurzeln ausziehet, wenn etwas überbleibet, da dieselbe ausgezogen werden, kan das übergebliebene noch durch ein Ganzes, noch durch ein Bruch vorgestellet werden. Nun obwohlen dieses unmöglich ist, kan man doch wenigstens zu dem Werthe des übergebliebenen so nahe gelangen, daß dasselbe geringer, als $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ꝛc. ist, ja so nahe, als beliebig, dergestalt, daß der fehlende Theil sich allezeit um 10. mahl verminderen lässet, und dieses heisset die Wurzeln durch Näherung ausziehen.

163.) Wenn man zwey Zahlen, die nur um Eins von einander unterschieden sind, zum Quadrate erhebet, so ist das Quadrate der kleineren um die Wurzel zweymahl genommen, und Eins geringer, als das Quadrat der grösseren Zahl [144]; folgends, wenn die Wurzel aus einer Zahl gezogen wird, und etwas überbleibet, ist das übrige allezeit minder als die gefundene Wurzel zweymahl genommen und Eins; denn, wenn das übergebliebene der Wurzel

gleichete, wäre die Wurzel um Eins grösser; folgends könnte nichts überblieben. Zum Beweiß wollen wir die Wurzel aus 45 ziehen, diese ist 6, mit einem Reste von 9. Ich sage, dieser Rest 9 sey geringer, als die Wurzel 6. zweymahl genom̃en = 12, und eins = 13. denn wenn diese 13 zu dem Quadrate 36 addiret werden, so kommet ein vollkommenes Quadrat 49 heraus, wessen Wurzel 7, um eins grösser ist als 6. dannenhero folget nothwendig, daß die 9, so nach ausgezogener Wurzel übergeblieben, kleiner als eine Unität von der Wurzel seyen.

164.) Wenn ihr also aus einem unvollkommenen Quadrate z. E. aus 67 die Wurzel durch Näherung ziehen sollet, mit der Bedingnis, daß dasjenige, was der Wurzel fehlet, geringer als $\frac{1}{10}$ davon sey, so dörfet ihr nur zu 67. zwey Nullen setzen; dieses aber ist eben so viel, als wenn ihr 67. durch 100. multiplicireten, und ein Bruch $\frac{6700}{100}$ daraus machten. Da nun von 100. die Wurzel 10 ist, so muß, wenn die Wurzel aus 6700 gezogen wird, dieselbe gewisse zehen Theile in sich enthalten.

$$\begin{array}{r|l} 67.00 & \frac{81}{10} = 8\frac{1}{10} \\ \hline 3.00 & \\ 161 & \\ \hline 139 & \end{array}$$

Nach ausgezogener Wurzel kommet im Quotiente $\frac{81}{10} = 8\frac{1}{10}$ für die nächste Wurzel zum Vorscheine. Dieser Wurzel kan kein Zehentheil abgehen, sonst wäre sie ein Wurzel eines vollkommenen Quadrates; weil das übergebliebene [139] nicht Eins von 81. gelten kan [n. 163.]

165.) Wenn das übergebliebene nach ausgezogener Wurzel kleiner als $\frac{1}{100}$ seyn soll, so müssen der vorgelegten Zahl vier Nullen beygefügt werden; dieses gilt hernach eben so viel, als wenn man 67 durch 10000 multiplicirет, und ein Bruch $\frac{670000}{10000}$ daraus gemacht

hätte.

hätte. Da nun vom 10000. die Wurzel 100 ist, so folget, daß dieselbe gewisse hundert Theile in sich begreiffen müsse; denn nach ausgezogener Wurzel

$$\begin{array}{l|l} 67.00.00 & 818 \\ \hline 3.00 & 100 \\ 161 & \\ \hline 139.00 & \\ 1628 & \\ \hline 876. & \end{array} = 8\frac{18}{100}$$

Erhellet alsobald, daß dieselbe $\frac{818}{100} = 8\frac{18}{100}$ Theile seyn müsse. Dieser gehet weniger als $\frac{1}{100}$ Theil ab, daß sie die nächste Wurzel von 67 sey; weil, die überbliebene 876 geringer als Eins von der Wurzel 818. angesehen werden [n. 163.]

166.) Solchergestalt dörfet ihr nur allezeit zwey Nullen mehr, nach Maß, daß man die Wurzel genauer zu haben verlanget, beyfügen; welches ihr auf solche Weise unendlich fort führen könnet, ohne daß ihr jemahls die nächste Wurzel bekommen werdet. Den Calcul zu verkürzen werden insgemein nur zwey Nullen zu denen vorkommenden Resten, und eine Bruchweis unter die Wurzel gesetzet. Ubrigens aber verfahret man, wie bisher gelehrt worden, und in der folgenden Operation zu ersehen. Z. E. Soll aus 28 die quadrat-Wurzel gezogen werden, dergestalt, daß das übrige geringer als ein $\frac{1}{10}$ der Wurzel sey.

28.00 | 52915

3.00 | 10000

1.04

96.00

1049

159.00

10581

5319.00

105825

2775 u. s. w. unendlich fort.

Wollte man die Wurzel noch genauer haben, so müßte man zu 2775 noch zwey Nullen setzen; dergestalt daß die ganze Kunst darinnen bestehet, daß man allezeit zwey Nullen zu den Resten, und eine unter die Wurzel setzet.

§. VI.

Von Ausziehung der Cubic-Wurzel durch Naherung.

167.) Wenn nach ausgezogener Cubic-Wurzel ein Rest zum Vorscheine kommet, so habet ihr abermahl, wie bey der Quadrat-Wurzel ein unfehlbares Zeichen, daß die gegebene Zahl kein vollkomener Cubus gewesen sey; folgends, daß man die Wurzel nicht anders als durch Näherung finden könne. Bey der Cubic-Wurzel pflegt man nach Maß, daß dieselbe genau begehret wird, zu den Resten allezeit drey Nullen

zu setzen, unter die Wurzel aber zu dem Nenner kommet nur eine, wie bey der Quadrat-Wurzel. Z. E. Wenn ihr aus 48. die Cubic-Wurzel ziehen sollet, so setzet dazu drey Nullen, wie dahier:

```
48.000 | 36
27     | --
------ | 10
21.000             162
 2 7               324
19656               216
-----             -----
 1344             19656.
```

Nach ausgezogener Wurzel, kommen $\frac{36}{10} = 3\,\frac{6}{10}$, nebst einem Reste von 1344. zum Vorscheine, welcher nicht so viel als Eins von der Wurzel gelten kan. [n. 163.] deßwegen gehet der Wurzel, daß sie die nächste wäre, nicht $\frac{1}{10}$ ab.

168.) Wenn ihr die Wurzel noch genauer zu wissen verlanget, so setzet zu 1344 noch 3. Nullen, und verfahret, wie vorhin:

```
48.000.000 | 363        36
27         | ---  = 3  ---
---------- | 100       100
21.000
 2 7
19656
----------
  1344.000
   3888
  1166147
----------
   177853
```

Auf diese Weise könnet ihr unendlich fortfahren, und so nahe, als euch beliebet, oder ihr es nöthig habet, zu der gesuchten Wurzel gelangen.

langen. Wobey aber zu erinneren, daß man so oft unter die Wurzel zu dem Nenner eine Nulle setzen müsse, als das übergebliebene durch drey vermehret worden.

169.) Wenn man durch Näherung die Wurzeln aus höheren Dignitäten ziehen soll, so werden zu dem übergebliebenen so viel Nullen gesetzet, als der Exponente der gegebenen Dignität Einheiten enthält. Ihr setzet nämlich bey dem Biquadrate 4, bey der fünften 5, und der sechsten Dignität ꝛc. 6. Nullen hinzu. Hingegen werden unter die Wurzel zu dem Nenner nicht mehr, als eine Nulle gesetzet; das übrige wird aus dem, was bis dahin angeführt worden, leicht zu verrichten sey.

§. VII.

Von Ausziehung, der Wurzeln aus den Brüchen.

170.) Wir haben bey Erhebung der Brüchen zu ihren Dignitäten erinneret, daß, wenn ein Bruch erhoben werden soll, man den Zehler und den Nenner besonders als ungebrochene Grössen ansehen, einen jeden in sich selbst multiplicieren, und aus beyden Producten ein neuen Bruch machen müsse. Hieraus fliesset nun, daß, wenn ein Bruch ein vollkommenes Quadrate, oder Cubus ꝛc. ist, sein Zehler, und Nenner auch vollkommene Quadrata oder Cubi ꝛc. seyen; folgends, daß, wenn aus dem Zehler und Nenner zugleich, und besonders die Wurzeln gezogen werden, dieselbe die verlangte Wurzel des Bruches vorstellen. Z. E. Wenn ihr aus $\frac{aa}{bb}$ die Quadrat-Wurzel ziehen sollet, so dörfet ihr nur aus dem Zehler aa die Wurzel a, und aus dem Nenner bb die Wurzel b ziehen, und beede Wurzeln Bruchweis

über

über einander setzen, so kommet die Wurzel von $\frac{aa}{bb} = \frac{a}{b}$ heraus. Ein gleiche Beschaffenheit hat es auch mit der Cubic-Wurzel, denn diese ist von $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b}$. In den Zahlen ist ein gleiches zu beobachten; so ist die quadrat-Wurzel von $\frac{4}{9} = \frac{2}{3}$. Die Cubic-Wurzel aus $\frac{27}{64} = \frac{3}{4}$ wenn ihr aus Ganzen und Brüchen zugleich die Wurzeln ziehen sollet, so müsset ihr erst die Ganze zu Brüchen reduciren [n. 80.], und hernach die Wurzeln ausziehen, wie dahier geschehen.

§. VIII.

Von Ausziehung der Wurzeln aus den Brüchen durch Näherung.

171.) Wenn ihr aus den Brüchen durch Näherung die Wurzeln ziehen sollet, so dörfet ihr nur dem Zehler und Nenner eine gleiche Anzahl Nullen beyfügen, beyde als ungebrochene Grössen ansehen, und die Wurzeln nach gegebener Lehre ausziehen; hernach aber die gefundene Quotiente wieder Bruchweis über einander setzen; dabey aber ist noch ferners zu erinneren, daß man unten in die Stelle des Nenners keine Nullen, wie bey den ganzen Zahleu zu geschehen pfleget, setzen könne. Z.E. Wenn ihr aus $\frac{5}{7}$ die quadrat-Wurzel zu wissen verlanget, mit der Bedingnis, daß, was ihr zur Vollkomenheit abgehet, geringer als ein tausend Theil der Wurzel sey, so müsset ihr 6. Nullen dem Zehler, und eben so viel dem Nenner beyfügen, die Wurzeln besonders aus 5000000 und 7000000. ziehen, und ihre Quotienten 2236 und 2645 wieder Bruchweis über einander schreiben, so ist die gesuchte Wurzel $\frac{2236}{2645}$ wie aus der folgenden Operation zu ersehen.

$$\frac{5}{7} = \frac{5000000}{7000000}$$

```
5. 00. 00. 00. | 2 2 3 6
1. 00.
 42
-----------
16. 00
443
-----------
271. 00
4466
-----------
304
```

```
7. 00. 00. 00. | 2 6 4 5
3. 00
46
-----------
24. 00
524
-----------
304. 00
5285
-----------
3975
```

172.) Wenn ihr die Wurzel aus einer Grösse ziehen sollet, dergleichen sie nicht hat, so setzet folgendes Wurzel-Zeichen vor sie, und darüber den gehörigen Exponenten der Wurzel: in der Quadrat-Wurzel aber könnet ihr den Exponenten weglassen; also schreibet ihr die Cubic-Wurzel von x, $\sqrt[3]{x}$; hingegen wird die Wurzel der fünften Dignität von x, also geschrieben $\sqrt[5]{x}$.

Das

Das sechste Capitel
Von den Irrational-Grössen.

§. I.

Erklärung.

173.) Wir haben in dem vorgehenden Capitel gelehrt, daß die Reste nach ausgezogener Wurzel untrügliche Zeichen der unrichtigen Dignitäten sind, und daß man dieselbe noch durch ganze, noch durch gebrochene Zahlen vorstellen könne [n. 162.] die Grössen von dieser Art, daraus die verlangte Wurzeln nicht genau gefunden werden können, heissen Irrational-Grössen, oder, wenn es Zahlen sind, Irrational-Zahlen: dergleichen sind $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{6}$.

174.) Die Irrational-Grössen pflegt man solcher Gestalt vorzustellen; man setzet vor dieselbe das Wurzel-Zeichen, und darüber den gehörigen Exponenten der Wurzel, so die Höhe der Dignität, daraus die Wurzel gezogen werden soll, andeutet. Auf sole Weise will $\sqrt{a}$ die Quadrat-Wurzel von a, $\sqrt[3]{b}$ die Cubic-Wurzel aus

b, und $\sqrt[8]{a+b+c}$ die Wurzel der achten Dignität aus a+b+c anzeigen. u. s. w. Dabey aber muß wohl beobachtet werden, daß das Wurzel-Zeichen sich über alle Glieder der Grösse, daraus die Wurzel verlangt wird, erstrecken müsse.

175.) Der Calculus, wessen man sich in Berechnung der Irrational-Grössen bedienet, ruhet auf einigen Grund-Sätzen, welche wir dahier ganz kürzlich erläutern wollen; zumahlen in Erwegung des Nutzens, welcher dabey zu hoffen ist, wir keines wegs ausführlich zu seyn verlangen. Doch sollet ihr nicht gleich vermeinen, es seyen unnützliche Grillen, wovon ihr den Nutzen nicht bald sehen könnet; ihr werdet zu seiner Zeit erfahren, daß ich niemahls eine Lehre vortrage, die nicht ihren Gewissen nutzen hat.

§. II.

Der erste Grundsatz.

176.) Wenn ihr zwey Quadrate, oder zwey Cubos, oder zwo andere Dignitäten nach Belieben, und hernach ihre beede Wurzeln durch einander multipliciret, so kommet in dem Producte der Quadraten, oder anderer Dignitäten, annoch ein vollkommenes Quadrat, oder andere Dignität: hingegen in dem Producte der Wurzeln in einander, die neue Wurzel der multiplicirten Dignitäten heraus. Es sey Z. E. das Quadrat aa, wessen Wurzel a, und bb, daraus die Wurzel b ist. Multipliciret aa, durch bb, und a durch b; so giebet das Product der Quadraten aabb, und der Wurzeln ab. Ich sag, aabb sey ein vollkommenes Quadrat, wessen Wurzel ab ist. Eine gleiche Beschaffenheit hat es auch mit den Zahlen. Es sey Z. E. der Cubus 8, wessen Wurzel 2, und der andere 27, daraus die Wurzel 3 ist. Multipliciret 27 durch 8, und 2 durch 3, so giebet das Product der Cuborum 216, und der Wurzeln 6. Nun ist 216 ein vollkommener Cubus, daraus die Wurzel 6 ist W. Z. E.

§. III.

Der andere Grundsatz.

177.) Gleichwie man ganze in Brüche, oder Brüche in ganze zu verwandeln pfleget, eben so werden auch die Irrational grösser, welche ohne Wurzel-Zeichen stehen, unter dasselbe, und die unter einem Wurzel-Zeichen sind, ausser demselben reduciret. Wenn ihr z. E. a unter ein Wurzel-Zeichen, wessen Exponent 4 ist, bringen sollet, dörfet ihr nur a dreymahl in sich selbst multipliciren, das ist, zum Biquadrate erheben, und das Product a^4 unter das Wurzel-Zeichen $\sqrt[4]{a^4}$ schreiben so ist geschehen, was man verlangete.

178.) Eine gleiche Beschaffenheit hat es auch mit den Irrational-Zahlen. Ihr sollet z. E. 4. unter ein Wurzel-Zeichen, wessen Exponent 2 ist, reduciren. Erhebet 4 zum Quadrate $= 16$, und schreibet $4 = \sqrt{16}$. So ist der Sache genug geschehen. Mit einem Wort, ihr dörffet nur die Grössen zu der von dem Exponente des Wurzel-Zeichens begehrten Dignität erheben, so wird euere Arbeit richtig seyn.

179.) Wenn ein Theil der Grösse vor- und der andere unter dem Wurzel-Zeichen stehet, wird der Theil vor dem Wurzel-Zeichen zur verlangten Dignität erhoben, und durch den anderen unter dem Zeichen multipliciret. Wenn ihr z. E. $a\sqrt{b}$ unter das Wurzel-Zeichen bringen sollet, so müsset ihr a durch a, und das Product aa durch b multipliciren, das ganze Product aber aab unter das Zeichen $\sqrt{aab}$ schreiben, so ist $a\sqrt{b} = \sqrt{aab}$. Auf gleiche Weise verfahret ihr auch mit den Zahlen. Ihr sollet z. E. $2\sqrt{9}$ unter das Wurzel-Zeichen bringen; erhebet 2 zum Quadrate $= 4$, multipliciret 4 durch 9, und schreibet 36 unter das Zeichen, so ist $2\sqrt{9} = \sqrt{36}$.

180.) Wenn man Grössen unter dem Wurzel-Zeichen zu Grössen vor dem Wurzel-Zeichen reduciren soll, muß wohl in Acht genommen werden, ob die Dignität, welche durch den Exponente angedeutet wird, richtig sey, dergestalt, daß sich die Wurzel ohne Reste ausziehen lässet. Wenn sich dieses also befindet, darf man nur die durch den Exponente angezeigte Wurzel ausziehen, und den Quotient ohne Zeichen anschreiben. Z. E. Wenn ihr $\sqrt[3]{8}$ in eine vor dem Wurzel-Zeichen stehende Grösse verwandeln sollet, so müsset ihr wohl erwegen, daß, weil der Exponent 3 die Cubic-Wurzel aus 8 andeutet, und diese sich ohne Reste ausziehen lässet, ihr nur aus 8 die verlangte Wurzel zu ziehen, und den Quotiente ohne Zeichen anzuschreiben habet.

181.) Wenn aber die Grösse unter dem Zeichen kein vollkommene Dignität des durch den Exponente angezeigten Grades ist sondern nur die Dignität desselben in sich begreiffet; weil sie aber durch ein andere Grösse multipliciret worden, die angezeigte Dignität so viel mahl in sich enthält, als der Multiplicante Einheiten hat, so müsset ihr die Grösse durch die Zahl, wodurch dieselbe multipliciret worden, wieder dividiren, die Wurzel vor, und den Divisorem unter das Zeichen setzen. Es wird z. E. gegeben $\sqrt{18}$ in eine vor dem Wurzel-Zeichen stehende Grössen zu verwandeln; da merket, daß, weil 18 das Quadrat 9 durch [2] multipliciret in sich begreiffet, ihr 18 durch 2 dividiren, aus dem Quotiente 9 die Wurzel ziehen, und 3 vor, den Divisorem 2 aber unter das Zeichen setzen müsset, so wird $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$.

182.) Wenn auf solche Weise die Grössen unter dem Wurzel-Zeichen zu Grössen vor demselben gemacht werden, es seye, daß etwas überbleibet, oder nicht, so wird diese Operation die Irrational-Grössen zu ihren Exponenten reduciren genennet; es erreignet sich öfters, daß man dadurch eine Verhältniß der Irrational-Grössen

gegen die Rationale entdecket; und wenn dieses geschiehet, heissen dieselbe quantitates communicantes, wiedrigen Falles aber sind sie non-communicantes.

§. IV.

Der dritte Grundsatz.

183.) Gleichwie man zwey oder mehrere Brüche zu einerley Benennung führet, so werden auch zwey oder mehrere Irrational-Grössen unter ein Wurzel-Zeichen gebracht. Ihr verlanget z. E. $\sqrt{a}$ und $\sqrt[4]{\ }$ unter ein Wurzel-Zeichen zu reduciren. Multipliciret a durch a = aa, und schreibet $\sqrt[4]{aa}$, so ist geschehen, was man verlangte. Denn, weil a ein Quadrat ist, wessen Wurzel $\sqrt{a}$ vorstellet, so dörfet ihr nur dasselbe in sich selbst multipliciren; denn solcher Gestalt kommet in dem Producte aa die vierte Dignität von a heraus. Auf diese Weise kan man mit allen anderen Irrational-Grössen, wenn sie Exponenten haben, die einander ohne Reste dividiren, verfahren.

184.) Wenn aber die Irrational-Grössen Exponenten haben, welche einander nicht ohne Reste dividiren können, müsset ihr genau untersuchen, wie vielmahl ihr den kleineren Exponente, damit er dem Grösseren gleich werde, zu sich selbst addiren sollet, und hernach die Grösse unter dem Zeichen eben so vielmahl in sich selbst multipliciren. Ihr verlanget z. E. zu wissen, wie man $\sqrt{3}$ und $\sqrt[12]{6}$ zu einerley Zeichen reduciren solle. Weil der Exponente der ersten $\sqrt{3} = 2$, und der anderen $\sqrt[12]{6} = 12$ ist, müsset ihr den kleineren 2, damit er dem Grösseren 12 gleich werde, fünf mahl zu sich selbst addiren, und hernach das Quadrate 3 unter dem Zeichen fünfmahl in sich selbst multipliciren. Nach verrichter Operation kommet im Producte

ducte $\sqrt[12]{729} = \sqrt{3}$ heraus. Solcher Gestalt stehen beyde unter einerley Zeichen $\sqrt[12]{}$. w. z. th.

185.) Wenn aber die Division des kleineren Exponentens in den Grösseren nicht angehet, muß man den kleinesten Theiler ausfindig machen, welcher beyde ohne Reste zu dividiren vermögend ist. Die Grössen aber unter dem Zeichen so hoch erheben, als es der Exponente des neuen quotientens erforderet. Es sey. Z. E. $\sqrt{7}$ und $\sqrt[3]{8}$ unter gleiche Zeichen zu bringen. Da müsset ihr die kleinste Zahl finden, die sich durch die Exponente 2 und 3 ohne Reste dividiren lässet; diese ist 6; jezt dörffet ihr nur den Exponeute 2, damit er dem gemeinen Exponente 6 gleich werde, zweymahl zu sich selbst addiren, und die 7 unter dem Zeichen zweymahl in sich selbst multipliciren, so ist nach verrichteter Operation das Product 343, welches ihr solcher Gestalt $\sqrt[6]{343}$ unter das Zeichen setzet. Jngleichen, weil der Exponente 3 nur einmahl zu sich selbst addiret dem gemeinen Exponente 6 gleich wird, so dörffet ihr auch die 8, so unter denen Zeichen stehen, nur einmahl in sich selbst multipliciren; und das Product 64 unter das Zeichen schreiben, wie dahier $\sqrt[6]{64}$. Solcher Gestalt sind beyde Producte von $\sqrt{7}$ und $\sqrt[3]{8}$ zu einerley Wurzel-Zeichen ($\sqrt[6]{343}$ und $\sqrt[6]{64}$) gebracht worden.

V.

§. V.

Von der Addition der Irrational-Grössen.

186.) Die Irrational-Grössen zu addiren müssen erst dieselbe zu ihren Exponenten und einerley Wurzel-Zeichen gebracht, hernach aber was von den Rational-Grössen gelehrt worden, beobachtet werden. Ihr verlanget Z. E. die Summe von $\sqrt{20}$ und $\sqrt[3]{24}$ zu wissen. Weil 20 das quadrat 4 durch 5 multipliciret in sich begreiffet, müsset ihr nach Lehre des §. 3. n. 181. die quadrat-Wurzel von $4 = 2$ nehmen, und 2 vor- 5 aber unter das Zeichen schreiben, so wird 20 zu seinem Exponente $2\sqrt{5}$ gebracht. Desgleichen weil $\sqrt[3]{24}$ den Cubum 8 durch 3 multipliciret in sich enthält, müsset ihr die Cubic-Wurzel von $8 = 2$ nehmen, hernach 2 vor- und 3 unter das Zeichen schreiben, so wird $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt{3}$ auch zu seinem Exponente gebracht. Wenn dieses geschehen, suchet ihr die kleinste Zahl, welche durch die Exponente 2 und 3 sich ohne Reste dividiren lässet §. IV. n. 185. da nun diese 6 ist; wird der Exponente 2, damit er dem gemeinen gleich werde, zweymahl zu sich selbst addiret; hingegen die Grösse unter dem Zeichen 5 zweymahl in sich selbst multipliciret, das Producte aber 125 unter das Zeichen geschrieben, wie dahier $2\sqrt[6]{125}$. Wenn ihr ein gleiches bey $2\sqrt{3}$ beobachtet, so bekommet ihr $\sqrt{20} = 2\sqrt[6]{9}$ und $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[6]{125}$. Jezt dörffet ihr nur eine nach der anderen, und das Mehr-Zeichen dazwischen setzen, so ist die Summe $2\sqrt[6]{125} + 2\sqrt[6]{9}$.

187.) Ein gleiche Beschaffenheit hat es auch mit den Buchstaben. Z. E. Soll $\sqrt{a+b}$ zu $\sqrt[4]{c+d}$ addiret werden. Wenn ihr $\sqrt{a+b}$ zu der Benennung des anderen Exponenten führet, so wird $\sqrt{a+b} = \sqrt[4]{aa+2ab+bb}$, und die Summe, welche man suchet $\sqrt[4]{aa+2ab+bb} + \sqrt[4]{c+d}$ herauskommen.

§. VI.

Von den Subtraction der Irrational-Grössen.

188.) Die Grössen werden, wo es nöthig ist, zu ihren Exponenten, und einerley Zeichen gebracht; hernach, wenn sie Communicantes sind, werden die vor dem Wurzel-zeichen von einander abgezogen, und das übergebliebene für die gesuchte Differenz angeschrieben. Wenn man Z. E. $2\sqrt{3}$ von $6\sqrt{3}$ subtrahiren soll, darf man nur 2 von 6 abziehen, und den Rest $+4\sqrt{3}$ anschreiben. Sollet ihr aber $+5\sqrt{2}$ von $-4\sqrt{2}$ abziehen, so bleiben $-9\sqrt{2}$ übrig §. 3. n. 33. denn $+5$ von -4 läßt im Reste -9. Ferners, wenn man $+3\sqrt{5}$ von $+2\sqrt{5}$ abziehet, so bleibet $-\sqrt{5}$; denn $+3$ von $+2$ lässet -1; es ist aber $-1\sqrt{5}$ eben so viel als $-\sqrt{5}$ [§. IV. n. 15.] folgends ꝛc.

Wenn aber die Grössen non-communicantes sind, müsset ihr die Subtraction, wie bey den Rational-Grössen verrichten. Man soll Z. E. $+4\sqrt{2}$ von $+6\sqrt{3}$ abziehen; da wird $6\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$ die gesuchte Differenz. Ingleichen wenn $+. 7\sqrt[3]{5}$ von $-3\sqrt[3]{3}$ subtrahirt werden, so bleibet $-3\sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{5}$ übrig.

VII.

§. VII.

Von der Multiplication der Irrational-Grössen.

189. Reduciret die Grössen zu ihren Exponenten und einerley Zeichen, und, wenn dieselbe unter diesem $\sqrt[2]{}$ Zeichen stehen, beyneben einander gleiche sind, so schreibet sie nur an ihr gehörigen Ort, wie sie sind, ohne was zu änderen, nur daß das Zeichen ausgelöschet werde. Sind aber die Grössen unter dem Zeichen ungleiche, oder auch die Zeichen mit höheren Exponenten z. E. $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$ ꝛc. bemerket, so müsset ihr die Zeichen behalten, und eine in die andere, nebst denen, die vor dem Zeichen stehen, wie gewöhnlich multipliciren. Ihr sollet z. E. $\sqrt{2}$ durch $\sqrt{2}$ multipliciren da schreibet nur 2 ohne Zeichen für das Producte an; denn, weil ein Wurzel in sich selbst multipliciret ein quadrat hervorbringet [§. I. Cap. IV. n. 99.]; $\sqrt{2}$ aber die Wurzel des quadrates 2 vorstellet, so folget, daß 2 das gesuchte Product aus der Wurzel $\sqrt{2}$. seyn müsse. Hingegen wenn $\sqrt[3]{8}$ durch $\sqrt[3]{8}$ multipliciret wird, ist $\sqrt[3]{64}$ das Product, welches man verlanget; denn $8 \times 8 = 64$; welche unter das Zeichen gehören. Desgleichen ist auch von $\sqrt[4]{a}$ durch $\sqrt[4]{b}$ das Product $\sqrt[4]{ab}$. §. II. n. 176.

§. VIII.

Von der Division der Irrational-Grössen.

190.) Reduciret die gegebenen Grössen zu ihren Exponenten, und einerley Wurzel-zeichen, und merket folgende Lehrsätze.

I.) Wenn die Grössen unter dem Wurzel-zeichen gleiche sind, so ist der quotient Eins, nur daß man das Zeichen auslösche. Sind aber die Grössen ungleiche, so muß eine durch die andere dividiret und der quotient unter das Zeichen geschrieben werden.

II.) Wenn die Division nicht ohne Bruch angehet, so werden beede Grössen Bruchweis unter einander geschrieben.

III.) In dem Falle, wo Grössen vor dem Zeichen stehen, wird eine durch die andere, wenn es ohne Reste geschehen kan, dividiret; wiedrigen Falles aber, wie die Brüche übereinander geschrieben. So ist nach Lehre der ersten Regel der quotient von $\sqrt{2}$ in $\sqrt{2} = 1$. Hingegen von $\sqrt{6}$ in $\sqrt{3} = \sqrt{2}$. Nach dem zweyten Lehrsatz ist der quotient von $\sqrt{7}$ durch $\sqrt{5} = \sqrt{\frac{7}{5}}$. Wobey das Vertical-Strüchlein andeutet, daß das Wurzel-zeichen sich über 7 und 5 erstrecken solle.

§. X.

§. IX.

Von Ausziehung der Wurzeln aus den Irrational-Grössen.

191.) Wenn man die Quadrat-Wurzel aus einer binomischen Grösse, die das erste Glied Rational führet, finden soll, so muß man aus beyden Gliederen das Quadrat machen, das andere von dem ersten ab- aus dem übergebliebenen die Wurzel ausziehen, den Quotient zu dem ersten Gliede addiren, und hernach aus der Helffte dieser Summe die Wurzel ziehen; so kommet die Wurzel des ersten Gliedes heraus. Wenn ihr nun auch den anderen Theil der Wurzel finden wollet, so müsset ihr eben diese Wurzel des Restes von dem ersten Gliede subtrahiren, und aus der Helffte des übergebliebenen die Wurzel ausziehen. Wenn ihr Z. E. aus $19 + 8\sqrt{3}$ die Quadrat-Wurzel ziehen sollet, so müsset ihr in Erwegung, daß das erste Glied 19 rational ist, aus 19 das uadrat 361, und aus $8\sqrt{3}$ ein anderes 192 machen, dieses von jennem abziehen, aus dem Reste aber 169 die Wurzel extrahiren, hernach den Quotient 13 zu 9 addiren, und aus der Helffte dieser Summe $32 = 16$. abermahl die Wurzel ausziehen, so ist 4 die Wurzel der Rational-Zahl, oder des ersten Theiles.

Wenn ihr jezt 13 von 19 abziehet, und von den übergebliebenen 6. die helffte 3. nehmet, so findet ihr den anderen Theil der Wurzel $\sqrt{3}$. setzet beyde zusammen, wie dahier, $4 + \sqrt{3}$; so habet ihr gethan, was man verlangete.

Ende des ersten Theiles.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Eberenz, Johann Baptist, 1723-1788

Algebra, Oder Gründliche Anweisung Zu Der Buchstaben-Rechen-Kunst

Bd.: [Erster Theil]

Augspurg und Freyburg im Breyßgau 1758

4 Math.p. 103 a-1/3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10479427-4
VD18 90906764